Міністерство освіти і науки України
Донецький національний університет імені Василя Стуса
Факультет математики та інформаційних технологій

Н. В. Вайсруб, К. В. Смоктій, О. Д. Смоктій, В. А. Врублевський

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З КУРСУ «ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ»

Вінниця
2019

УДК 517.977(076.5)
М 545

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету математики та інформаційних технологій
(протокол № 10 від 20 червня 2019 року)

Автори: *Н. В. Вайсруб,* доцент кафедри прикладної математики і теорії систем управління;
К. В. Смоктій, доцент кафедри прикладної математики і теорії систем управління;
О. Д. Смоктій, доцент кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій;
В. А. Врублевський, асистент кафедри прикладної математики і теорії систем управління.

Рецензенти: *О. Д. Трофименко,* канд. фіз.-мат. наук, учений секретар;
Т. В. Січко, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики і теорії систем управління.

Вайсруб Н. В., Смоктій К. В., Смоктій О. Д., Врублевський В. А.

М 545 Методичні рекомендації щодо виконання лабораторних та індивідуальних завдань з курсу «Теорія керування» / *Н. В. Вайсруб, К. В. Смоктій, О. Д. Смоктій, В. А. Врублевський.* Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2019. 76 с.

Методичні рекомендації містять стислі теоретичні положення теорії керування, рекомендації щодо вирішення практичних завдань, приклади розв'язання задач, а також контрольні запитання та завдання для самостійного опрацювання.

Методичні рекомендації призначені для студентів галузей знань 11 «Математика і статистика» та 12 «Інформаційні технології».

УДК 517.977(076.5)

© Вайсруб Н. В., 2019
© Смоктій К. В., 2019
© Смоктій О. Д., 2019
© Врублевський В. А., 2019
© ДонНУ імені Василя Стуса, 2019

ЗМІСТ

Вступ

Теорія управління вивчає загальні принципи побудови автоматичних систем і методи їхнього дослідження незалежно від фізичної природи процесів, що відбуваються в них. Теорія управління є теоретичною базою автоматичних систем в різних областях техніки, дає основну теоретичну базу для дослідження і проектування автоматичних і автоматизованих систем, вивчає процеси управління і завдання створення будь-яких систем зі зворотним зв'язком.

Методичні матеріали щодо виконання лабораторних та індивідуальних завдань містять короткі теоретичні відомості, що викладаються студентам в рамках загального курсу «Теорія управління», а також рекомендації до вирішення практичних завдань, приклади розв'язання задач, контрольні запитання та завдання для самостійного рішення. Матеріал посібника охоплює елементи операційного обчислення, опис лінійних динамічних систем у вигляді моделі «вхід–вихід», дослідження динамічних і частотних характеристик, аналіз типових ланок, що складають систему, а також проблему асимптотичної стійкості систем.

Методичні матеріали призначені для використання при проведенні лабораторних занять з курсу «Теорія управління», а також для самостійної роботи студентів.

Тема 1. Перетворення Лапласа та його властивості. Основи операційного обчислення

Нехай функція $f(t)$, $t \in R$ задовольняє наступні умови:

1) $f(t)$ – кусково-неперервна функція на інтервалі $[0,+\infty)$;

2) $\forall t<0 \quad f(t)=0$;

3) $\exists$ такі константи A, S, $A>0: \forall t \geq 0$ виконується нерівність $|f(t)|< Ae^{St}$, тобто функція $f(t)$ зростає не швидше за експоненціальну функцію.

Означення. *Перетворенням Лапласа* функції $f(t)$, яка задовольняє умови 1) – 3), називається функція комплексної змінної p, що визначається рівністю:

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Означення. *Зворотне перетворення Лапласа* для зображення $F(p)$ – це функція $f(t)$ така, що $L[f(t)] = F(p)$.

При цьому функція $f(t)$ називається *оригіналом*, а функція $F(p)$ називається *зображенням* Лапласа.

Знайдемо перетворення Лапласа для деяких найпростіших функцій.

Приклад 1.1. Знайти перетворення Лапласа функції $f(t)=0$.

Розв'язання. Функція $f(t)=0$ задовольняє всі три наведені вище умови. Тоді її перетворення Лапласа дорівнює:

$$L[f(t)] = L[0] = \int_0^\infty 0 \cdot e^{-pt}dx = 0.$$

Відповідь: $L[0]=0$.

Приклад 1.2. Знайти перетворення Лапласа функції $f(t)=1$.

Розв'язання. Функція $f(t)=1$ не задовольняє умові 2. Введемо нову функцію $I(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ та знайдемо її перетворення Лапласа. Таку операцію надалі будемо виконувати з усіма функціями, які задовольняють умови 1 та 3, але не задовольняють 2, і для стислості відповідні позначення будемо опускати.

$$L[I(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p}.$$

Відповідь: $L[I(t)] = \frac{1}{p}$.

Приклад 1.3. Знайти перетворення Лапласа функції $f(x)=e^{\alpha t}$.

Розв'язання. $L[f(t)]=\int\limits_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\int\limits_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt=-\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p-\alpha}$.

Відповідь: $L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p}$.

Перетворення Лапласа багатьох елементарних функцій наведені в таблицях відповідностей оригіналів та їхніх зображень (див. Додаток А) [1]. Для знаходження перетворення Лапласа від функцій, які не представлені в таблиці, доцільно скористатися властивостями перетворення Лапласа, що дають змогу знаходити зображення заданої функції без безпосереднього інтегрування.

Властивості перетворення Лапласа

Нехай функції *f(t) і g(t)* задовольняють умови 1) – 3), і визначені наступні перетворення Лапласа: $L[f(t)]=F(p)$ і $L[g(t)]=G(p)$.

1. Лінійність

Для будь-яких сталих a і b справедлива рівність:

$$L[a\cdot f(t)+b\cdot g(t)]=aF(p)+bG(p).$$

2. Подібність

Для будь-якої сталої $a>0$ справедливі рівності:

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\ L\left[\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=F(ap).$$

3. Теорема запізнювання

Нехай $\forall t<a\ (a>0)\ f(t-a)=0$, тоді:

$$L[f(t-a)]=e^{-ap}F(p).$$

4. Теорема зміщення

Для будь-якої сталої a справедлива рівність:

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(p+a).$$

5. Теорема попередження

Для будь-якої сталої $a>0$ вірна рівність:

$$L[f(t+a)]=e^{ap}\left[F(p)-\int\limits_0^a e^{-pt}f(t)\,dt\right].$$

6. Диференціювання оригіналу

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0).$$

7. Диференціювання зображення

$$L\left[(-1)^n t^n f(t)\right]=F^{(n)}(p).$$

8. Інтегрування оригіналу

$$L\left[\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{F(p)}{p}.$$

9. Інтегрування зображення

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int\limits_p^\infty F(q)dq.$$

Розглянемо приклади використання перерахованих властивостей перетворення Лапласа для знаходження зображень.

Приклад 1.4. Знайти перетворення Лапласа функції $f(t)=2+4e^{5t}$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $L[1]=\frac{1}{p}$ і $L\left[e^{5t}\right]=\frac{1}{p-5}$. Тоді в силу лінійності перетворення Лапласа, отримуємо:

$$L\left[2+4e^{5t}\right]=2L[1]+4L[e^{5t}]=\frac{2}{p}+\frac{4}{p-5}.$$

У деяких випадках ефективним є застосування *формул Ейлера*, як це показано далі в прикладі 1.5:

$$\sin\beta t=\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i};\ \cos\beta t=\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}.$$

Приклад 1.5. Знайти перетворення Лапласа функції $f(t)=\sin\beta t$.

Розв'язання. Скористаємося формулами Ейлера, а потім властивістю лінійності перетворення Лапласа.

$$L[\sin\beta t]=L\left[\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\left(L\left[e^{i\beta t}\right]-L\left[e^{-i\beta t}\right]\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\beta}-\frac{1}{p+i\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{p+i\beta-p+i\beta}{(p-i\beta)(p+i\beta)})=\frac{\beta}{p^2+\beta^2}.$$

Відповідь: $L[\sin\beta t]=\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$.

Приклад 1.6. Знайти перетворення Лапласа функції $f(t)=\cos\beta t$.

Розв'язання. Перетворення Лапласа отримаємо аналогічно прикладу 1.5.

$$L[\cos\beta t]=L\left[\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\beta}+\frac{1}{p+i\beta}\right)=\frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

Відповідь: $L[\cos\beta t]=\frac{p}{p^2+\beta^2}$.

Приклад 1.7. Знайти перетворення Лапласа функції $f(t)=e^{-\alpha t}\sin\beta t$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою зміщення (властивість 4) і тим, що $L[\sin\beta t]=\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$. Отримуємо: $L\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t\right]=\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$.

Приклад 1.8. Знайти перетворення Лапласа функції $f(x)=e^{\gamma t}\cos\beta t$.

Розв'язання. Аналогічно прикладу 1.7, отримуємо:

$$L\left[e^{\gamma t}\cos\beta t\right]=\frac{p-\gamma}{(p-\gamma)^2+\beta^2}.$$

Приклад 1.9. Дано зображення Лапласа $F(p)=\dfrac{5}{p-4}$. Знайти оригінал.

Розв'язання. З огляду на лінійність зворотнього перетворення Лапласа і той факт, що $L\left[e^{\alpha t}\right]=\dfrac{1}{p-\alpha}$, отримуємо:

$$L^{-1}\left[\frac{5}{p-4}\right]=5L^{-1}\left[\frac{1}{p-4}\right]=5e^{4t}.$$

Приклад 1.10. Дано зображення Лапласа $F(p)=\dfrac{2}{5p^2+20}$. Знайти оригінал.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $L[\sin\beta t]=\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$.

$$L^{-1}\left[\frac{2}{5p^2+20}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{5(p^2+4)}\right]=\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right]=\frac{1}{5}\sin 2t.$$

Задачі для самостійного розв'язання до теми 1

Задача 1.1. Знайти перетворення Лапласа наступних функцій:

а) $f(t)=e^{-4t}+\dfrac{1}{2}e^{t}$; б) $f(t)=\sin 3t-4e^{12t}$;

в) $f(t)=\sin\sqrt{3}t+\dfrac{1}{2}\cos 2t$; г) $f(t)=12e^{-t}-3e^{2t}+4$;

д) $f(t)=e^{-7t}+cos9t+15$; е) $f(t)=8e^{13t}+sin\sqrt{\pi}t+15sin5t$.

ж) $f(t)=7e^{-7t}+\cos(t-15)+1$; з) $f(t)=e^{-13t}sint+15\sin(t-1)$.

Задача 1.2. Дано зображення Лапласа $F(p)$. Знайти оригінал $f(t)$:

а) $F(p)=\dfrac{1}{p}$; б) $F(p)=\dfrac{12}{p+5}$; в) $F(p)=\dfrac{3}{2p+1}$; г) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$;

д) $F(p)=\dfrac{2}{p^2+1}$; е) $F(p)=\dfrac{4p}{p^2+4}$; ж) $F(p)=\dfrac{7}{p^2+5}$; з) $F(p)=\dfrac{3}{2p^2+8}$.

Контрольні запитання до теми 1

Основний рівень

1. Дайте означення перетворення Лапласа.
2. Якими властивостями повинна бути наділена функція $f(t)$, щоб можливо було визначити її перетворення Лапласа $L[f(t)]$?
3. Сформулюйте наступні властивості перетворення Лапласа: лінійність, подібність, теорема запізнювання, теорема попередження, теорема зміщення.
4. Дайте означення зворотнього перетворення Лапласа.

Поглиблений рівень

1. Що називають зображенням за Лапласом і оригіналом?
2. Сформулюйте наступні властивості перетворення Лапласа: диференціювання зображення, диференціювання оригіналу, інтегрування зображення, інтегрування оригіналу.

Тема 2 Зворотне перетворення Лапласа

Для знаходження зворотного перетворення Лапласа від функцій, які є дробово-раціональними, доцільно використати наступну теорему.

Теорема Хевісайда. Нехай зображення Лапласа функції $f(t)$ має вигляд $F(p)=L[f(t)]=\dfrac{R(p)}{Q(p)}$, де функції $R(p)$ і $Q(p)$ – поліноми: $R(p)=a_0p^m+a_1p^{m-1}+...+a_m$ і $Q(p)=p^n+b_1p^{n-1}+...+b_n$, причому $m<n$. Відомі корені полінома $Q(p)$: $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$, причому $\mu_1,\mu_2,...,\mu_r$ – їхні кратності, $\sum\limits_{k=1}^{r}\mu_k=n$. Тоді оригінал $f(t)$ можна знайти за формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\mu_k}\frac{A_{jk}t^{\mu_k-j}}{(\mu_k-j)!}e^{\lambda_k t}, \qquad (2.1)$$

де A_{jk} – це числові коефіцієнти, які визначаються за формулою: $A_{jk}=\dfrac{1}{(j-1)!}\lim\limits_{p\to\lambda_k}\dfrac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\left((p-\lambda_k)^{\mu_k}\dfrac{R(p)}{Q(p)}\right)$, $j=\overline{1,\mu_k}$, $k=\overline{1,r}$.

Якщо кратності всіх коренів $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ дорівнюють одиниці $(r=n)$, то оригінал можна знайти за формулою:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}A_ke^{\lambda_k t}, \qquad (2.2)$$

де $A_k=\dfrac{R(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)}$, $k=\overline{1,n}$.

Приклад 2.1. Знайти зворотне перетворення Лапласа (оригінал) від зображення $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2+3p+2}$.

Розв'язання. Наведене зображення задовольняє усі умови теореми Хевісайда: $R(p)=p-1$, $Q(p)=p^2+3p+2$ – поліноми, степінь чисельника менше степеня знаменника.

Тоді $Q'(p)=2p+3$, корені многочлена $Q(p)$: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. Корені $Q(p)$ прості, тому скористаємося формулою (2.2). Оригінал буде мати вигляд: $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{2}A_ke^{\lambda_k t}$.

Знайдемо коефіцієнти A_1 і A_2.

$$A_1=\frac{R(\lambda_1)}{Q'(\lambda_1)}=\frac{R(-1)}{Q'(-1)}=\frac{-1-1}{-2+3}=-2,$$

$$A_2=\frac{R(\lambda_2)}{Q'(\lambda_2)}=\frac{R(-2)}{Q'(-2)}=\frac{-2-1}{-4+3}=3.$$

Отже, шуканий оригінал дорівнює: $f(t)=-2e^{-t}+3e^{-2t}$.

Відповідь: $f(t)=-2e^{-t}+3e^{-2t}$.

Приклад 2.2. Знайти оригінали для наступних зображень:

а) $F(p)=\dfrac{3p+16}{p^2+p-20}$; б) $F(p)=\dfrac{-8p+10}{p^2-13p+42}$;

в) $F(p)=\dfrac{3p-5}{2p^2+8p+6}$; г) $F(p)=\dfrac{13p+4}{p^2-3p+1}$.

Розв'язання аналогічно прикладу 2.1. Пропонуємо самостійно виконати знаходження оригіналів і звірити отримані відповіді.

Відповідь: а) $f(t)=-\dfrac{1}{9}e^{-5t}+\dfrac{28}{9}e^{4t}$; б) $f(t)=38e^{6t}-46e^{7t}$;

в) $f(t)=-2e^{-t}+\dfrac{7}{2}e^{-3t}$; г) $f(t)=\dfrac{65-47\sqrt{5}}{10}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}+\dfrac{65+47\sqrt{5}}{10}e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}$.

Приклад 2.3. Знайти оригінал для зображення $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{p^5-p}$.

Розв'язання. У позначеннях теореми Хевісайда $R(p)=p^2+p+1$, $Q(p)=p^5-p$, $Q'(p)=5p^4-1$. Корені многочлена $Q(p)$: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$, $\lambda_4=i$, $\lambda_5=-i$. Всі умови теореми виконані, корені прості. Обчислимо значення коефіцієнтів A_1, …, A_5.

$$A_1=\frac{R(\lambda_1)}{Q'(\lambda_1)}=\frac{R(0)}{Q'(0)}=\frac{1}{-1}=-1;$$

$$A_2=\frac{R(\lambda_2)}{Q'(\lambda_2)}=\frac{R(1)}{Q'(1)}=\frac{3}{4};\ A_3=\frac{R(\lambda_3)}{Q'(\lambda_3)}=\frac{R(-1)}{Q'(-1)}=\frac{1}{4};$$

$$A_4=\frac{R(\lambda_4)}{Q'(\lambda_4)}=\frac{R(i)}{Q'(i)}=\frac{i}{4};\ A_5=\frac{R(\lambda_5)}{Q'(\lambda_5)}=\frac{R(-i)}{Q'(-i)}=\frac{-i}{4}.$$

Тоді оригінал буде мати вигляд: $f(t)=-1+\dfrac{3}{4}e^{t}+\dfrac{1}{4}e^{-t}+\dfrac{i}{4}e^{it}-\dfrac{i}{4}e^{-it}$.

Перетворимо отриману функцію за допомогою формули Ейлера: $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

$$f(t) = -1 + \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{i}{2}\cdot i \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -1 + \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

Відповідь: $f(t) = -1 + \dfrac{3}{4}e^{t} + \dfrac{1}{4}e^{-t} - \dfrac{1}{2}\sin t$.

Приклад 2.4. Знайти оригінал для зображення $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2-1)^3}$.

Розв'язання. У позначеннях теореми Хевісайда $R(p) = p^2$, $Q(p) = (p^2-1)^3$, корені многочлена $Q(p)$: $\lambda_{1,2,3} = 1$, $\lambda_{4,5,6} = -1$; корені кратні, тому оригінал $f(t)$ будемо знаходити за формулою (2.1) у вигляді:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{A_{jk} t^{3-j}}{(3-j)!} e^{\lambda_k t},$$

де $A_{jk} = \dfrac{1}{(j-1)!} \lim\limits_{p\to\lambda_k} \dfrac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\left((p-\lambda_k)^{\mu_k} \dfrac{R(p)}{Q(p)}\right)$, $j = \overline{1,3}$, $k = 1,2$.

Знайдемо коефіцієнти A_{jk}:

$$A_{11} = \frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}\left((p-1)^3 \frac{p^2}{(p^2-1)^3}\right) = \lim_{p\to 1}\left(\frac{p^2}{(p+1)^3}\right) = \frac{1}{8},$$

$$A_{21} = \frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{(p+1)^3}\right) = \lim_{p\to 1}\left(\frac{2p}{(p+1)^3} - \frac{3p^2}{(p+1)^4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16},$$

$$A_{31} = \frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p^2}{(p+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left(\frac{2}{(p+1)^3} - \frac{12p}{(p+1)^4} + \frac{12p^2}{(p+1)^5}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{16},$$

$$A_{12} = \frac{1}{0!}\lim_{p\to -1}\left((p+1)^3 \frac{p^2}{(p^2-1)^3}\right) = \lim_{p\to -1}\left(\frac{p^2}{(p-1)^3}\right) = -\frac{1}{8},$$

$$A_{22} = \frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{(p-1)^3}\right) = \lim_{p\to -1}\left(\frac{2p}{(p-1)^3} - \frac{3p^2}{(p-1)^4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16},$$

$$A_{32} = \frac{1}{2!}\lim_{p\to -1}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p^2}{(p-1)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to -1}\left(\frac{2}{(p-1)^3} - \frac{12p}{(p-1)^4} + \frac{12p^2}{(p-1)^5}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{16}.$$

Тоді оригінал $f(t)$ буде мати вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{8}\frac{t^2}{2!}e^{t} + \frac{1}{16}\frac{t^1}{1!}e^{t} - \frac{1}{16}\frac{t^0}{0!}e^{t} - \frac{1}{8}\frac{t^2}{2!}e^{-t} + \frac{1}{16}\frac{t^1}{1!}e^{-t} + \frac{1}{16}\frac{t^0}{0!}e^{-t} =$$
$$= \frac{1}{16}t^2e^{t} + \frac{1}{16}te^{t} - \frac{1}{16}e^{t} - \frac{1}{16}t^2e^{-t} + \frac{1}{16}te^{-t} + \frac{1}{16}e^{-t}.$$

Відповідь: $f(t) = \dfrac{1}{16}\left(t^2e^{t} + te^{t} - e^{t} - t^2e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язання до теми 2

Задача 2.1. Знайти зворотне перетворення Лапласа від наступних зображень:

а) $F(p) = \dfrac{8p-1}{p^2+6p-16}$; б) $F(p) = \dfrac{p}{p^2+11p-5}$;

в) $F(p) = \dfrac{p+6}{p^3-p}$; г) $F(p) = \dfrac{2p+13}{p^3-1}$;

д) $F(p) = \dfrac{2p}{5p-12}$; е) $F(p) = \dfrac{4p+7}{5p-3}$;

ж) $F(p) = \dfrac{2p+1}{7p^3-14p^2-105p}$; з) $F(p) = \dfrac{5p-3}{7p^3+14p^2-105p}$.

Контрольні запитання до теми 2

Основний рівень

1. Для яких зображень можливе застосування теореми Хевісайда?
2. Що дозволяє знайти теорема Хевісайда?
3. Сформулюйте теорему Хевісайда для випадку простих коренів.

Поглиблений рівень

1. Сформулюйте теорему Хевісайда для випадку кратних коренів.
2. Якими будуть комплексні корені знаменника зображення, яке є дробово-раціональною функцією з дійсними коефіцієнтами?
3. Як необхідно перетворити оригінал, отриманий за допомогою теореми Хевісайда, якщо корені знаменника зображення комплексні?

Тема 3 Застосування перетворення Лапласа для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Перетворення Лапласа дозволяє спростити розв'язання багатьох задач, зокрема, звести розв'язання багатьох задач диференціального, інтегрального та інтегро-диференціального числення до розв'язання алгебраїчних рівнянь. Розглянемо застосування перетворення Лапласа для розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь та їхніх систем зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 3.1. Розв'язати звичайне диференціальне рівняння $f''(t)-3f'(t)+2f(t)=e^{-5t}$ за допомогою перетворення Лапласа при початкових умовах: $f(0)=1$, $f'(0)=0$.

Розв'язання. Візьмемо перетворення Лапласа від обох частин рівняння і застосуємо властивість лінійності перетворення Лапласа:

$$L[f''(t)-3f'(t)+2f(t)]=L\left[e^{-5t}\right];$$

$$L[f''(t)]-3L[f'(t)]+2L[f(t)]=\frac{1}{p+5}.$$

Позначимо $F(p)=L[f(t)]$ і в лівій частині рівняння виразимо усі доданки через $F(p)$. Для цього скористаємось властивістю диференціювання оригіналу:

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0).$$

Тоді отримаємо:

$$L[f''(t)]=p^2F(p)-\sum_{k=1}^{2}p^{2-k}f^{(k-1)}(0)=p^2F(p)-p^1f(0)-p^0f'(0)=$$

$$=p^2F(p)-p;$$

$$L[f'(t)]=pF(p)-p^0f(0)=pF(p)-1.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння та зведемо подібні:

$$p^2F(p)-p-3\cdot(pF(p)-1)+2F(p)=\frac{1}{p+5};$$

$$F(p)\cdot(p^2-3p+2)-p+3=\frac{1}{p+5};$$

$$F(p)(p^2-3p+2)=\frac{1}{p+5}+p-3=\frac{p^2+2p-14}{p+5};$$

$$F(p)=\frac{p^2+2p-14}{(p+5)(p^2-3p+2)}.$$

Зверніть увагу, що в знаменнику зображення обов'язково міститься множник, що є характеристичним поліномом вихідного диференціального рівняння (в нашому випадку $p^2–3p+2$).

Для знаходження функції $f(t)$ скористаємось теоремою Хевісайда: $R(p)=p^2+2p-14$, $Q(p)=(p+5)(p^2-3p+2)=p^3+2p^2-13p+10$, корені многочлена $Q(p)$: $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$ – прості; $Q'(p)=3p^2+4p-13$.

$$A_1=\frac{R(-5)}{Q'(-5)}=\frac{25-10-14}{75-20-13}=\frac{1}{42};\ A_2=\frac{R(2)}{Q'(2)}=\frac{4+4-14}{12+8-13}=-\frac{6}{7};$$

$$A_3=\frac{R(1)}{Q'(1)}=\frac{1+2-14}{3+4-13}=\frac{11}{6}.$$

Отримуємо розв'язання вихідної задачі:

$$f(t)=\frac{1}{42}e^{-5t}-\frac{6}{7}e^{2t}+\frac{11}{6}e^{t}.$$

Приклад 3.2. Розв'язати задане диференціальне рівняння $x''(t)+4x'(t)+3x(t)=e^{6t}$ за допомогою перетворення Лапласа за наступних початкових умов: $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

Розв'язання. Візьмемо перетворення Лапласа від обох частин рівняння:

$$L[x''(t)+4x'(t)+3x(t)]=L\left[e^{6t}\right];$$

$$L[x''(t)]+4L[x'(t)]+3L[x(t)]=\frac{1}{p-6}.$$

Позначимо $X(p)=L[x(t)]$ і в лівій частині рівняння виразимо всі доданки через $X(p)$, використовуючи властивість диференціювання оригіналу:

$$L[x''(t)]=p^2X(p)-p^1x(0)-p^0x'(0)=p^2X(p)-p+1;$$

$$L[x'(t)]=pX(p)-p^0x(0)=pX(p)-1.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння:

$$p^2X(p)-p+1+4\cdot(pX(p)-1)+3X(p)=\frac{1}{p-6};$$

$$X(p)=\frac{p^2-3p-17}{(p-6)(p^2+4p+3)}.$$

Застосуємо теорему Хевісайда: $Q(p)=p^3-2p^2-21p-18$, $Q'(p)=3p^2-4p-21$, $R(p)=p^2-3p-17$. Корені многочлена $Q(p)$: $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-3$.

$$A_1 = \frac{R(6)}{Q'(6)} = \frac{36-18-17}{108-24-21} = \frac{1}{63}; A_2 = \frac{R(-1)}{Q'(-1)} = \frac{1+3-17}{3+4-21} = \frac{13}{14};$$

$$A_3 = \frac{R(-3)}{Q'(-3)} = \frac{9+9-17}{27+12-21} = \frac{1}{18}.$$

Розв'язання вихідної задачі:

$$x(t) = \frac{1}{63}e^{6t} + \frac{13}{14}e^{-t} + \frac{1}{18}e^{-3t}.$$

Приклад 3.3. Розв'язати диференціальне рівняння $f''(t)+16f(t)=e^t$ за допомогою перетворення Лапласа за умови виконання таких початкових умов: $f(0)=1$, $f'(0)=3$.

Розв'язання аналогічне прикладам 3.1, 3.2.

Відповідь: $f(t) = \frac{25}{34}\sin 4t + \frac{16}{17}\cos 4t + \frac{1}{17}e^t$.

Приклад 3.4. Розв'язати задане диференціальне рівняння $f''(t)+4f'(t)+3f(t)=e^{-t}$ за допомогою перетворення Лапласа за умови виконання таких початкових умов: $f(0)=3$, $f'(0)=2$.

Розв'язання аналогічне прикладам 3.1, 3.2.

Відповідь: $f(t) = -\frac{9}{4}e^{-3t} + \frac{21}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}$.

Приклад 3.5. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = te^t$.

Розв'язання. Знаходимо зображення правої частини: $L[te^t] = \frac{1}{(p-1)^2}$.

Позначимо $L[x(t)]=X(p)$, $x(0)=x_0$, $x'(0)=x'_0$ (x_0 і x'_0 відіграють роль довільних сталих). Враховуючи, що

$$L\left[\frac{dx}{dt}\right] = pX(p)-x_0, L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = p^2X(p)-x_0p-x'_0,$$

отримуємо:

$$(p^2+2p+5)X(p)-x_0(p+2)-x'_0 = \frac{1}{(p-1)^2};$$

$$X(p) = x_0\frac{p+2}{p^2+2p+5} + x'_0\frac{1}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p+1)^2(p^2+2p+5)}.$$

Далі $x_0\frac{p+2}{p^2+2p+5} = x_0\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right\}$, тоді

$$L^{-1}\left[x_0\frac{p+2}{p^2+2p+5}\right] = x_0e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t).$$

Аналогічно $x'_0\frac{1}{p^2+2p+5} = \frac{x'_0}{2}\cdot\frac{1}{(p^2+1)^2+2^2}$, тоді

$$L^{-1}\left[x'_0\frac{1}{p^2+2p+5}\right] = \frac{x_0}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Для відшукання оригіналу останнього доданку представимо його у вигляді суми простих дробів безпосередньо, не вдаючись до формули Хевісайда.

$$\frac{1}{(p-1)^2(p^2+2p+5)} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{(p-1)} + \frac{Cp+D}{(p^2+2p+5)};$$

$$1 = A(p^2+2p+5) + B(p-1)(p^2+2p+5) + (Cp+D)(p-1)^2.$$

Нехай $p=1$, тоді $1=8A$ і $A=\frac{1}{8}$.

Нехай $p=-1+2i$, тоді:

$$1 = (C(-1+2i)+D)(-2+2i)^2 = (D-C+2iC)(-8i) = 16C - 8i(D-C),$$

звідки $C=\frac{1}{16}$, $D-C=0$, тоді $C=D=\frac{1}{16}$.

Коефіцієнт B визначаємо з умови рівності нулю коефіцієнтів при p^3 правої частини отриманої рівності, тобто $B+C=0$, $B=-C=-\frac{1}{16}$.

Отже, оскільки $\frac{1}{(p-1)^2(p^2+2p+5)} = \frac{1}{8}\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{16}\frac{p+1}{(p+1)^2+4}$,

то $L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}\right] = \frac{1}{8}te^t - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{16}e^{-t}\cos 2t$.

Збираючи оригінали всіх доданків, знаходимо розв'язок рівняння:

$$x(t) = \frac{2t-1}{16}e^t + e^{-t}\left(\left(x_0+\frac{1}{16}\right)\cos 2t + \frac{x_0+x'_0}{2}\sin 2t\right) =$$

$$= \frac{2t-1}{16}e^t + e^{-t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t),$$

де $C_1 = x_0 + \frac{1}{16}$, $C_2 = \frac{x_0 + x_0'}{2}$.

Відповідь: $x(t) = \frac{2t-1}{16}e^t + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$, $C_1 = x_0 + \frac{1}{16}$, $C_2 = \frac{x_0 + x_0'}{2}$.

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами можна інтегрувати операційним методом так само, як і окремі рівняння. Вся відмінність полягає в тому, що замість одного рівняння, яке містить зображення шуканої функції, ми приходимо до системи таких рівнянь, причому система ця буде у відношенні зображень лінійної алгебраїчної.

Приклад 3.6. Проінтегрувати систему лінійних диференціальних рівнянь за умови виконання заданих початкових умов:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ 2x + \frac{dy}{dt} - 3y = 3e^{2t}; \end{cases}$$

$x(0) = 2, \ \ y(0) = 0$.

Розв'язання. Позначимо: $L[x(t)] = X(p)$, $L[y(t)] = Y(p)$, тоді $L\left[\frac{dx}{dt}\right] = pX(p) - 2$, $L\left[\frac{dy}{dt}\right] = pY(p)$. Підставляючи в систему, отримуємо:

$$\begin{cases} (p+3)X(p) - 4Y(p) - 2 = \frac{9}{p-2} \\ 2X(p) + (p-3)Y(p) = \frac{3}{p-2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} (p+3)X(p) - 4Y(p) = \frac{2p+5}{p-2} \\ 2X(p) + (p-3)Y(p) = \frac{3}{p-2} \end{cases}.$$

Розв'язуючи систему відносно $X(p)$ і $Y(p)$, отримуємо:

$$X(p) = \frac{2p^2 - p - 3}{(p^2-1)(p-2)} = \frac{2p-3}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2},$$

$$Y(p) = -\frac{p+1}{(p^2-1)(p-2)} = -\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2}.$$

Візьмемо зворотне перетворення Лапласа і запишемо шукані функції:

$x(t) = e^t + e^{2t}$; $y(t) = e^t - e^{2t}$.

Відповідь: $x(t) = e^t + e^{2t}$; $y(t) = e^t - e^{2t}$.

Приклади 3.5, 3.6 демонструють переваги операторного методу при розв'язанні диференціальних рівнянь і систем: можливість знайти частинні розв'язки системи, оминувши загальні; більш зручна форма представлення загального розв'язку системи, що дозволяє одразу, прямою підстановкою початкових умов, виділити із загального розв'язку необхідний частинний розв'язок.

Задачі для самостійного розв'язання до теми 3

Задача 3.1. Розв'язати задачу Коші за допомогою перетворення Лапласа:

а) $f''(t) + 6f'(t) + 5f(t) = e^{-2t}$, $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$;

б) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-3t}$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 1$;

в) $f''(t) + f'(t) + f(t) = e^t$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$;

г) $x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = e^{5t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

Контрольні запитання до теми 3

Основний рівень

1. Для розв'язання яких диференціальних рівнянь доцільне застосування перетворення Лапласа?
2. Які властивості перетворення Лапласа варто застосовувати при розв'язанні диференціальних рівнянь і систем?
3. Яке рівняння відносно невідомого зображення виходить в результаті застосування перетворення Лапласа до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?

Поглиблений рівень

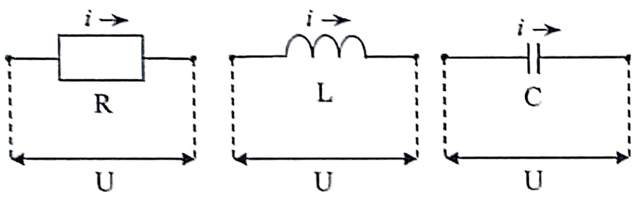
1. Які переваги, порівняно з класичними методами, дає застосування операційних методів при розв'язанні диференціальних рівнянь і систем?
2. Чи можливе застосування операційних методів для розв'язання рівнянь в частинних похідних? Для розв'язання рівнянь зі змінними коефіцієнтами?

Тема 4 Імпеданс динамічної системи

Аналіз різних елементів динамічних систем показує, що різноманітні елементи, які відрізняються призначенням, конструкцією, принципом дії та фізичними процесами, описуються подібними рівняннями і є подібними за динамічним властивостям. Розглянемо поняття імпеданса системи як величини, яка застосовується для дослідження її динамічних властивостей.

Електричні системи

На рис. 4.1 представлені схеми найпростіших електричних систем: активний опір (резистор), індуктивність (котушка індуктивності), ємність (конденсатор). Тут i – сила струму в ланцюгу, U – напруга на кінцях ланцюга, R – опір, L – індуктивність, C – ємність елемента ланцюга.



а) б) в)

Рис. 4.1 – Найпростіші електричні системи: а) опір; б) індуктивність; в) ємність

Означення. *Імпеданс електричної системи* дорівнює відношенню $Z(p)=\dfrac{U(p)}{I(p)}$, де $U(p)=L[u(t)]$, $I(p)=L[i(t)]$.

Розглянемо знаходження імпеданса представлених електричних систем відповідно до законів електродинаміки.

Як відомо з курсу фізики, система «опір» (рис. 4.1а) характеризується законом Ома: $U(t)=R\cdot i(t)$; тоді, взявши перетворення Лапласа, отримаємо: $U(p)=R\cdot I(p)$. Отже, імпеданс опору *(операторний опір)* дорівнює:

$$Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)}=\frac{R\,I(p)}{I(p)}=R.$$

Для системи «індуктивність» (рис. 4.1б) виконується співвідношення: $U(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$, тоді, за нульових початкових умов (п. у.), $U(p)=LpI(p)$. Імпеданс індуктивності (операторний опір індуктивності) дорівнює:

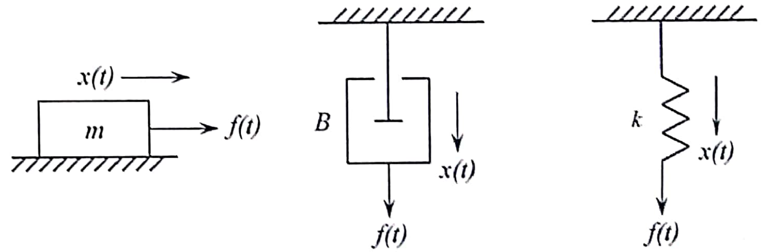
$$Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)}=\frac{L\,p\,I(p)}{I(p)}=L\,p.$$

Для системи «ємність» (рис. 4.1, в) справедливий закон: $U(t)=\dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt$, тоді $U(p)=\dfrac{1}{Cp}I(p)$. Імпеданс ємності (операторний опір ємності) дорівнює:

$$Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)}=\frac{I(p)}{Cp\cdot I(p)}=\frac{1}{Cp}.$$

Механічні системи переміщення

На рис. 4.2 представлені схеми найпростіших механічних систем переміщення: маса, тертя, пружність. Введемо позначення: $f(t)$ – прикладена сила, $x(t)$ – переміщення центру мас механічної системи, $v(t)$ – швидкість переміщення, $a(t)$ – прискорення переміщення, m – маса тіла, B – коефіцієнт демпфірування, k – коефіцієнт пружності пружини. Будемо позначати перетворення Лапласа зазначених функцій $F(p)=L[f(t)]$, $X(p)=L[x(t)]$, $V(p)=L[v(t)]$ і так далі за аналогією.



а) б) в)

Рис. 4.2 – Найпростіші механічні системи переміщення: а) маса; б) тертя; в) пружність

Означення. *Механічний імпеданс переміщення* – це одне з двох відношень $Z(p)=\dfrac{F(p)}{V(p)}$ (якщо виходом системи вважається швидкість $v(t)$) або $Z(p)=\dfrac{F(p)}{X(p)}$ (якщо виходом системи вважається переміщення $x(t)$).

Для механічної системи «маса» (рис. 4.2а), згідно з другим законом Ньютона, за нульових п. у. маємо: $f(t)=m\cdot a(t)=m\cdot\dfrac{dv}{dt}=m\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Отже, $F(p)=mpV(p)=mp^2X(p)$.

Механічний імпеданс маси дорівнює:

$$Z(p)=\frac{F(p)}{V(p)}=mp \text{ або } Z(p)=\frac{F(p)}{X(p)}=mp^2.$$

Для механічної системи «тертя» (рис. 4.2б) справедливе співвідношення: $f(t)=B\cdot\frac{dx}{dt}=B\cdot v(t)$. Звідси $F(p)=BpX(p)=BV(p)$. Механічний імпеданс опору дорівнює:

$$Z(p)=\frac{F(p)}{V(p)}=B \text{ або } Z(p)=\frac{F(p)}{X(p)}=B\cdot p.$$

Для механічної системи «пружність» (рис. 4.2в), згідно з законом Гука маємо: $f(t)=k\,x(t)=k\cdot\int_0^t v(\tau)d\tau$. Звідси $F(p)=k\,X(p)=\frac{k}{p}V(p)$.

Механічний імпеданс пружності дорівнює:

$$Z(p)=\frac{F(p)}{X(p)}=k \text{ или } Z(p)=\frac{F(p)}{V(p)}=\frac{k}{p}.$$

Між механічними та електричними системами існує аналогія, що визначається таблицею 4.1.

Таблиця 4.1 – Таблиця імпедансів різних систем

Електричний імпеданс		Механічний імпеданс переміщення		
Елемент системи	$Z(p)$	Елемент системи	$Z(p)=\frac{F(p)}{V(p)}$	$Z(p)=\frac{F(p)}{X(p)}$
Індуктивність	Lp	Маса	mp	mp^2
Конденсатор	$\frac{1}{Cp}$	Пружина	$\frac{k}{p}$	k
Опір	R	Демпфер	B	Bp

На підставі законів розподілу напруг в ланцюгу при паралельному та послідовному з'єднаннях елементів можна показати, що для електричних мереж при послідовному з'єднанні імпеданси додаються, тобто $Z=Z_1+\ldots+Z_n$, а при паралельному з'єднанні сумуються величини, обернені до імпедансів, тобто $\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\ldots+\frac{1}{Z_n}$

(Z – імпеданс системи, $Z_1, \ldots, Z_n$ – імпеданси складових її елементів).

Окрім того, при розв'язанні задач використовують закони Кірхгофа:

1) сума струмів (або операторних струмів) в будь-якому вузлі електричного ланцюга дорівнює нулю;

2) сума падінь напруг (або операторних напруг) вздовж довільного замкненого контура дорівнює нулю.

Для розв'язання задачі знаходження вихідної величини струму для динамічної системи електричного лацюга, в якому як вхідна змінна розглядається напруга, необхідно знайти імпеданс цього ланцюга (детальніше це питання буде розглянуто в темах 5 і 6). Для механічних систем застосовується аналогічний підхід (вхідною змінною є прикладена сила, вихідною – переміщення або швидкість).

Приклад 4.1. Знайти імпеданс електричної системи (рис. 4.3).

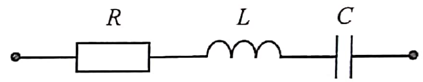


Рис. 4.3 – Схема динамічної системи для прикладу 4.1

Розв'язання. В цій системі присутні 3 елементи (резистор, котушка індуктивності, конденсатор), з'єднані послідовно, отже, імпеданс системи дорівнює:

$$Z(p)=R+Lp+\frac{1}{Cp}=\frac{LCp^2+RCp+1}{Cp}.$$

Приклад 4.2. Знайти імпеданс механічної системи (рис. 4.4).

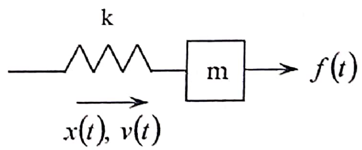


Рис. 4.4 – Схема динамічної системи для прикладу 4.2

Розв'язання. В заданій системі присутні 2 елементи (пружина і маса), з'єднані послідовно. Нехай виходом цієї системи вважається переміщення $x(t)$, тоді імпеданс дорівнює: $Z(p)=mp^2+k+Bp$. Якщо виходом вважається швидкість $v(t)$, то $Z(p)=mp+\frac{k}{p}+B=\frac{mp^2+Bp+k}{p}$.

Приклад 4.3. Знайти імпеданс електричної системи (рис. 4.5).

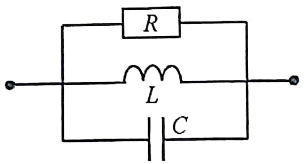


Рис. 4.5 – Схема динамічної системи для прикладу 4.3

Розв'язання. У системі присутні 3 елементи, з'єднані паралельно, отже, імпеданс системи $Z(p)$ визначається за формулою:

$$\frac{1}{Z(p)}=\frac{1}{R}+Cp+\frac{1}{Lp};$$

$$\frac{1}{Z(p)}=\frac{Lp+RLCp^2+R}{RLp};$$

$$Z(p)=\frac{RLp}{RLCp^2+Lp+R}.$$

Приклад 4.4. Знайти імпеданс електричної системи (рис. 4.6).

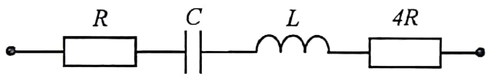


Рис. 4.6 – Схема динамічної системи для прикладу 4.4

Розв'язання. У заданій системі присутні 4 елементи, з'єднані послідовно, отже, імпеданс системи дорівнює:

$$Z(p)=R+\frac{1}{Cp}+Lp+4R=5R+\frac{1}{Cp}+Lp=\frac{LCp^2+5RCp+1}{Cp}.$$

Приклад 4.5. Знайти імпеданс електричної системи (рис. 4.7).

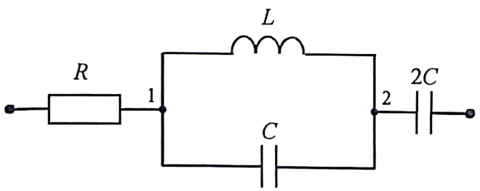


Рис. 4.7 – Схема динамічної системи для прикладу 4.5

Розв'язання. Знайдемо спочатку імпеданс на ділянці 1–2, що містить 2 елементи, з'єднані паралельно:

$$\frac{1}{Z_{12}(p)}=\frac{1}{Lp}+Cp=\frac{1+LCp^2}{Lp};$$

$$Z_{12}(p)=\frac{Lp}{1+LCp^2}.$$

Оскільки ділянка 1–2 послідовно з'єднана з рештою елементів – резистором і конденсатором, – то імпеданс всього ланцюга буде дорівнювати:

$$Z(p)=R+Z_{12}(p)+\frac{1}{2Cp}=R+\frac{Lp}{1+LCp^2}+\frac{1}{2Cp}.$$

Приклад 4.6. Знайти імпеданс електричної системи (рис. 4.8).

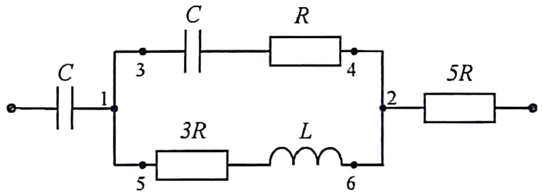


Рис. 4.8 – Схема динамічної системи для прикладу 4.6

Розв'язання. Знайдемо імпеданси на ділянках 3–4 і 5–6:

$$Z_{34}(p)=\frac{1}{Cp}+R=\frac{1+RCp}{Cp},\ Z_{56}(p)=3R+Lp.$$

Оскільки ділянки 3–4 і 5–6 з'єднані паралельно, то імпеданс ділянки 1–2 знайдемо за формулою: $\frac{1}{Z_{12}(p)}=\frac{1}{Z_{34}(p)}+\frac{1}{Z_{56}(p)}$.

$$\frac{1}{Z_{12}(p)}=\frac{1}{Z_{34}(p)}+\frac{1}{Z_{56}(p)}=\frac{Cp}{1+RCp}+\frac{1}{3R+Lp}=\frac{3RCp+CLp^2+RCp+1}{(1+RCp)(3R+Lp)}.$$

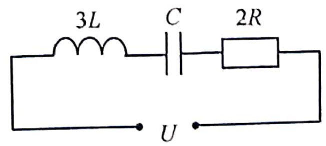
Тоді імпеданс всього ланцюга дорівнює:

$$Z(p)=\frac{1}{Cp}+Z_{12}(p)+5R=\frac{1}{Cp}+\frac{(1+RCp)(3R+Lp)}{CLp^2+4RCp+1}+5R.$$

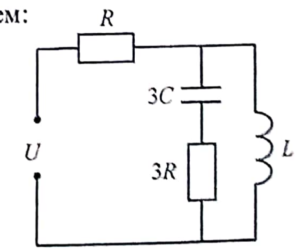
Задачі для самостійного розв'язання до теми 4

Задача 4.1. Знайти імпеданси наступних систем:

а)



б)



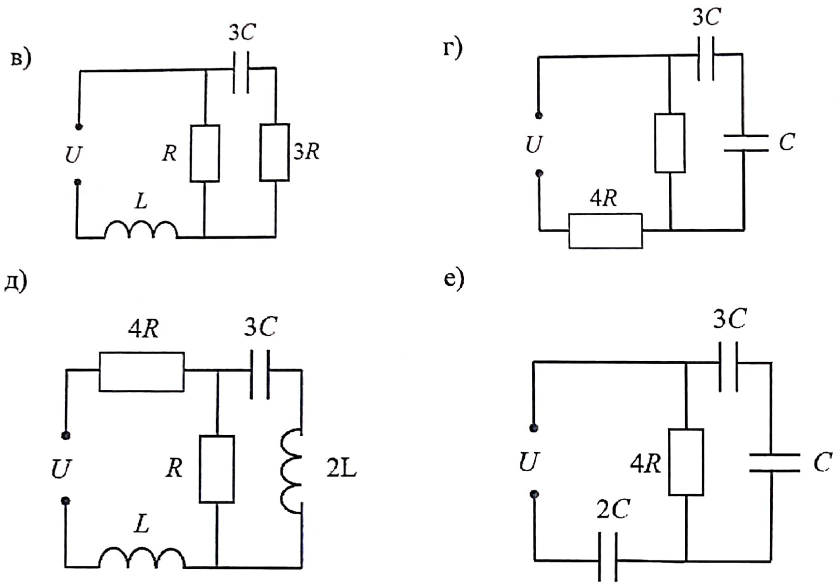


Рис. 4.9 – Схеми динамічних систем для задачі 4.1

Контрольні запитання до теми 4

Основний рівень

1. Дайте означення імпедансу електричної системи; імпеданса механічної системи.
2. Як розрахувати імпеданси найпростіших електричних і механічних елементів систем?
3. Сформулюйте правило розрахунку імпедансів при послідовному і паралельному з'єднанні елементів системи.

Поглиблений рівень

1. Як розраховується імпеданс системи, що містить послідовно і паралельно з'єднані елементи?
2. Яка аналогія існує між елементами електричних і механічних систем?

Тема 5 Передавальна функція динамічної системи

Розглянемо лінійну стаціонарну одновимірну динамічну систему (ДС) з вхідною змінною (входом) $y(t)$ та вихідною змінною (виходом) $x(t)$ (рис. 5.1).

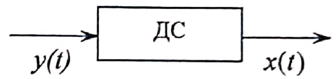


Рис. 5.1 – Узагальнена схема динамічної системи

Означення. *Передавальна функція* $W(p)$ динамічної системи – це відношення перетвореної за Лапласом вихідної змінної до перетвореної за Лапласом вхідної змінної цієї системи за нульових початкових умов (п. у.): $W(p)=\dfrac{X(p)}{Y(p)}$, де $X(p)=L[x(t)]$, $Y(p)=L[y(t)]$.

Передавальна функція є одним зі способів математичного опису динамічної системи і може бути розглянута як диференціальний оператор, що виражає зв'язок між входом та виходом лінійної стаціонарної системи. За нульових п. у. диференціальне рівняння опису ДС і передавальна функція пов'язані взаємнооднозначно. Знаючи вхідний сигнал системи і передавальну функцію, можна відновити вихідний сигнал.

Приклад 5.1. Задана динамічна система у вигляді електричного ланцюга, причому вхід системи – напруга $U_1(t)$, вихід – напруга $U_2(t)$ (рис. 5.2). Знайти передавальну функцію системи і відновити диференціальне рівняння опису функціонування системи в часі.

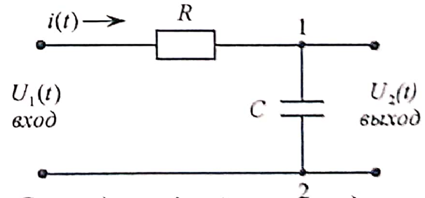


Рис. 5.2 – Схема динамічної системи для прикладу 5.1

Розв'язання. Передавальна функція заданої ДС визначається виразом $W(p)=\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}$ за нульових початкових умов, де $U_1(p)=L[U_1(t)]$, $U_2(p)=L[U_2(t)]$. Для знаходження передавальної функції будемо використовувати імпеданс системи.

Розглянемо імпеданс всієї системи: $Z(p)=R+\dfrac{1}{Cp}=\dfrac{RCp+1}{Cp}$.

З іншого боку, за означенням імпедансу електричних систем $Z(p)=\dfrac{U_1(p)}{i(p)}$, де $i(p)=L[i(t)]$, $i(t)$ – струм в ланцюгу.

Виражаємо $U_1(p)$: $U_1(p)=Z(p)i(p)=\dfrac{RCp+1}{Cp}i(p)$.

Розглянемо окремо ділянку 1–2: $Z_{12}(p)=\dfrac{1}{Cp}$. За означенням імпедансу для ділянки 1–2, $Z_{12}(p)=\dfrac{U_2(p)}{i(p)}$. Струм у виразах для $Z(p)$ і $Z_{12}(p)$ один і той самий, оскільки ланцюг є послідовним з'єднанням. Виражаємо $U_2(p)$: $U_2(p)=Z(p)_{12}\,i(p)=\dfrac{1}{Cp}i(p)$.

Отже, $W(p)=\dfrac{\dfrac{1}{Cp}i(p)}{\dfrac{RCp+1}{Cp}i(p)}=\dfrac{1}{RCp+1}$.

Позначимо $T=RC$, $T>0$. Тоді $W(p)=\dfrac{1}{Tp+1}$.

Відновимо диференціальне рівняння цієї системи за передавальною функцією. Для цього скористаємося знайденим значенням $W(p)$ і означенням передавальної функції.

$$W(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{1}{Tp+1};$$

$$U_1(p)=(Tp+1)U_2(p).$$

Остання рівність є *операторним рівнянням* системи. Взявши зворотне перетворення Лапласа від операторного рівняння за нульових початкових умов, отримаємо шукане диференціальне рівняння:

$$L^{-1}[U_1(p)]=L^{-1}[TpU_2(p)+U_2(p)];$$

$$U_1(t)=TU_2'(t)+U_2(t).$$

Приклад 5.2. Для заданої динамічної системи (рис. 5.3) знайти передавальну функцію і відновити диференціальне рівняння опису функціонування системи в часі.

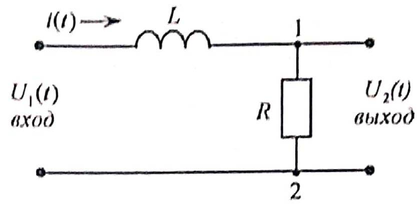


Рис. 5.3 – Схема динамічної системи для прикладу 5.2

Розв'язання. Імпеданс всього ланцюга $Z(p)=Lp+R$. З іншого боку, за означенням імпедансу, $Z(p)=\dfrac{U_1(p)}{i(p)}$. Виражаємо напругу $U_1(p)$: $U_1(p)=Z(p)i(p)=(Lp+R)\,i(p)$.

Розглянемо окремо ділянку 1–2: $Z_{12}(p)=R$. За означенням імпедансу, $Z_{12}(p)=\dfrac{U_2(p)}{i(p)}$. Виражаємо $U_2(p)$: $U_2(p)=Z_{12}(p)i(p)=Ri(p)$.

Отже, $W(p)=\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}=\dfrac{Ri(p)}{(Lp+R)i(p)}=\dfrac{R}{Lp+R}$. Для зручності передавальну функцію зведемо до стандартного вигляду – в чисельнику і знаменнику вільний коефіцієнт повинен дорівнювати 1:

$$W(p)=\frac{R}{Lp+R}=\frac{1}{\dfrac{Lp}{R}+1}.$$

Позначимо $T=\dfrac{L}{R}$, $T>0$; тоді $W(p)=\dfrac{1}{Tp+1}$.

Диференціальне рівняння системи має вигляд:

$$U_1(t)=TU_2'(t)+U_2(t).$$

Приклад 5.3. Для заданої динамічної системи (рис. 5.4) знайти передавальну функцію і відновити диференціальне рівняння опису функціонування системи в часі.

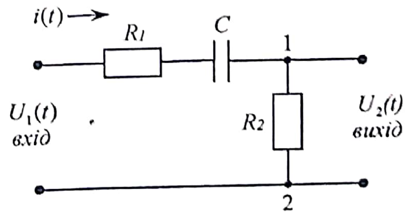


Рис. 5.4 – Схема динамічної системи для прикладу 5.3

Розв'язання. Провівши перетворення аналогічно прикладам 5.1 та 5.2, отримаємо вираження передавальної функції системи:

$$W(p)=\frac{R_2Cp}{R_1Cp+R_2Cp+1}.$$

Позначимо $T_1=R_1C$, $T_2=R_2C$, тоді передавальна функція набуде вигляду:

$$W(p)=\frac{T_2p}{T_1p+T_2p+1}.$$

Диференціальне рівняння має вигляд:
$T_2U_1'(t)=T_1U_2'(t)+T_2U_2'(t)+U_2(t)$.

Приклад 5.4. Для заданої динамічної системи (рис. 5.5) знайти передавальну функцію.

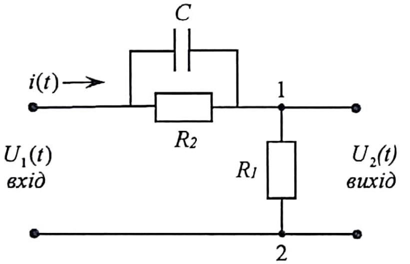


Рис. 5.5 – Схема динамічної системи для прикладу 5.4

Розв'язання. Провівши обрахунки аналогічно прикладам 5.1–5.2, отримаємо вираження передавальної функції системи:

$$W(p)=\frac{R_1(R_2Cp+1)}{R_1R_2Cp+R_1+R_2}=\frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_2Cp+1}{\dfrac{R_1R_2C}{R_1+R_2}p+1}.$$

Позначимо $L_0=\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$, $T_1=R_2C$, $T_2=\dfrac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$, тоді передавальна функція набуде вигляду:

$$W(p)=L_0\frac{T_1p+1}{T_2p+1}.$$

Приклад 5.5. Для заданої динамічної системи (рис. 5.6) знайти передавальну функцію.

Розв'язання. Знайдемо імпеданс всього ланцюга.

$Z_{32}(p)=\dfrac{1}{Cp}+R=\dfrac{RCp+1}{Cp}$;

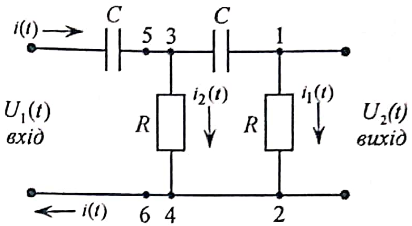


Рис. 5.6 – Схема динамічної системи для прикладу 5.5

$Z_{34}(p)=R$;

$$Z_{56}(p)=\left(\frac{1}{Z_{32}(p)}+\frac{1}{Z_{34}(p)}\right)^{-1}=\left(\frac{Cp}{RCp+1}+\frac{1}{R}\right)^{-1}=\left(\frac{2RCp+1}{R(RCp+1)}\right)^{-1}=$$
$$=\frac{R(RCp+1)}{2RCp+1};$$

$$Z(p)=\frac{1}{Cp}+\frac{R(RCp+1)}{2RCp+1}=\frac{2RCp+1+RCp(RCp+1)}{Cp(2RCp+1)}.$$

Тоді напруга на вході $U_1(p)=Z(p)i(p)$.

Аналогічно на ділянці 1–2: $Z_{12}(p)=R$, тоді $Z_{12}(p)=\dfrac{U_2(p)}{i_1(p)}$. Звідси напруга на виході $U_2(p)=Z_{12}(p)i_1(p)$.

Передавальна функція має вигляд: $W(p)=\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}=\dfrac{Z_{12}(p)i_1(p)}{Z(p)i(p)}$.

У випадку, коли в електричному ланцюгу присутнє паралельне з'єднання, необхідно виразити струм $i_1(p)$ через $i(p)$ або навпаки. Для цього користуються такими правилами:

1) $i(p)=i_1(p)+i_2(p)$;

2) напруга на паралельних ділянках однакова: $U_{32}(p)=U_{34}(p)$.

Оскільки $U_{32}(p)=Z_{32}(p)i_1(p)$, а $U_{34}(p)=Z_{34}(p)i_2(p)$, то $i_2(p)=\dfrac{Z_{32}(p)i_1(p)}{Z_{34}(p)}$.

Звідси $i(p)=i_1(p)+i_2(p)=i_1(p)+\dfrac{Z_{32}(p)i_1(p)}{Z_{34}(p)}=i_1(p)\left(1+\dfrac{Z_{32}(p)}{Z_{34}(p)}\right)$.

Передавальна функція дорівнює:

$$W(p)=\frac{Z_{12}(p)i_1(p)}{Z(p)i_1(p)\left(1+\dfrac{Z_{32}(p)}{Z_{34}(p)}\right)}=\frac{R}{\dfrac{2RCp+1+RCp(RCp+1)}{Cp(2RCp+1)}\cdot\left(1+\dfrac{RCp+1}{RCp}\right)}=$$

$$=\frac{RCp\cdot(2RCp+1)\cdot RCp}{(2RCp+1+RCp(RCp+1))\cdot(2RCp+1)}=\frac{R^2C^2p^2}{R^2C^2p^2+3RCp+1}.$$

Позначимо $T=RC>0$, тоді $W(p)=\dfrac{T^2p^2}{T^2p^2+3Tp+1}$.

Задачі для самостійного розв'язання до теми 5

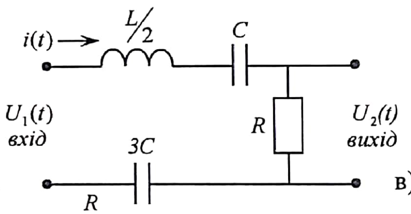
Задача 5.1. Записати передавальні функції динамічних систем а), б), описаних диференціальними рівняннями:

а) $x'''(t)-5x''(t)+2x'(t)-x(t)=2y'''(t)-4y''(t)+10y'(t)+12y(t)$;

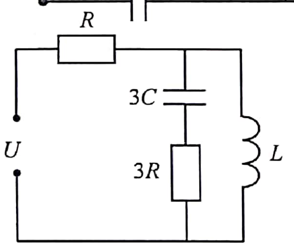
б) $x'''(t)+25x'(t)+10x(t)=8y''(t)+6y'(t)$.

Задача 5.2. Знайти передавальні функції наступних динамічних систем а)–в) і звести їх до стандартного вигляду.

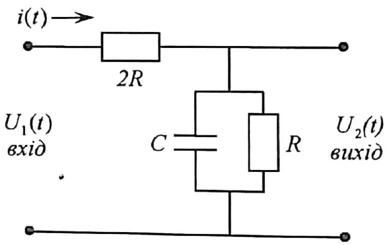
а)



б)



в)



Контрольні запитання до теми 5

Основний рівень

1. Сформулюйте означення передавальної функції динамічної системи.
2. Якими допоміжними величинами доцільно користуватись при знаходженні передавальних функцій електричних систем?

Поглиблений рівень

1. Якими правилами варто керуватися при вираженні стумів в паралельно з'єднаних ділянках ланцюга?
2. Із якою метою здійснюється вираження струму на ділянці паралельного з'єднання через початковий струм в ланцюгу?

Тема 6 Перехідна і вагова функції динамічної системи

Означення. *Перехідною функцією* $h(t)$ *(одиничною перехідною характеристикою)* називається реакція динамічної системи на одиничний ступінчастий вплив $I(t)$ за нульових початкових умов (рис. 6.1).

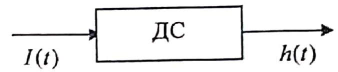


Рис. 6.1 – Схематична ілюстрація перехідної функції

Перехідну функцію можна знайти шляхом розв'язання диференціального рівняння системи за умови $y(t)=I(t)$ і нульових п. у. або за допомогою співвідношення:

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right]. \tag{6.1}$$

Означення. *Ваговою функцією* $k(t)$ (*імпульсною перехідною характеристикою*) називається реакція динамічної системи на одиничний ступінчастий вплив $\delta(t)$ за нульових початкових умов (рис. 6.2).

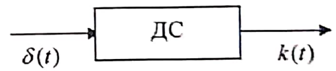


Рис. 6.2 – Схематична ілюстрація вагової функції

Вагову функцію можна знайти шляхом розв`язання диференціального рівняння системи за умови $y(t)=\delta(t)$ і нульових п. у. або за допомогою співвідношень:

$$k(t)=L^{-1}[W(p)], \tag{6.2}$$

$$k(t)=h'(t). \tag{6.3}$$

Приклад 6.1. Задана динамічна система з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{Tp}{Tp+1}$, $T>0$. Знайти перехідну і вагову функції та побудувати їхні графіки.

Розв'язання. Для знаходження перехідної функції використаємо формулу $h(t)=L^{-1}\left[\dfrac{W(p)}{p}\right]$. Отримуємо:

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right]=L^{-1}\left[\frac{T}{Tp+1}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p+{}^1\!/_T}\right]=e^{-\frac{t}{T}}.$$

Графік перехідної функції цієї системи наведено на рис. 6.3.

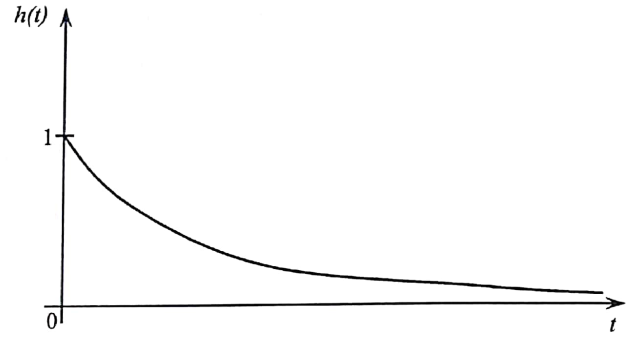


Рис. 6.3 – Графік перехідної функції $h(t)$ для прикладу 6.1

Вагову функцію знайдемо за формулою $k(t) = h'(t)$:

$$k(t) = h'(t) = -\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

Графік вагової функції цієї системи наведено на рис. 6.4.

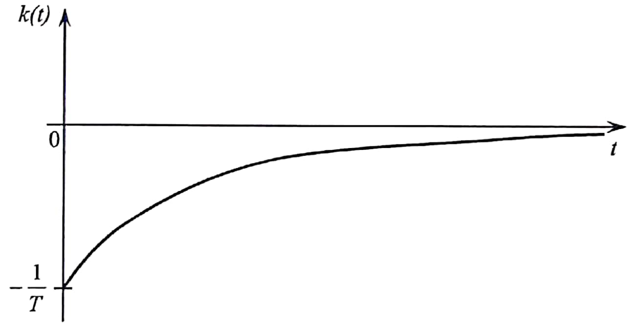


Рис. 6.4 – Графік вагової функції $k(t)$ для прикладу 6.1

Приклад 6.2. Знайти перехідну і вагову функції для наступних систем і побудувати їхні графіки.

а) $W(p) = \dfrac{T_2 p}{T_1 p + T_2 p + 1}$, $T_1, T_2 > 0$; б) $W(p) = \dfrac{2Tp + 2}{2Tp + 3}$, $T > 0$;

в) $W(p) = \dfrac{T^2 p^2}{T^2 p^2 + 3Tp + 1}$, $T > 0$.

Розв'язання

а) $W(p) = \dfrac{T_2 p}{T_1 p + T_2 p + 1}$, $T_1, T_2 > 0$.

Перехідна функція має вигляд:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{T_2}{T_1 p + T_2 p + 1}\right] = L^{-1}\left[\frac{T_2}{p(T_1 + T_2) + 1}\right] = \frac{T_2}{T_1 + T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1 + T_2}}.$$

Вагова функція дорівнює: $k(t) = h'(t) = -\dfrac{T_2}{(T_1 + T_2)^2} e^{-\frac{t}{T_1 + T_2}}$.

Графіки перехідної і вагової функцій наведено на рис. 6.5.

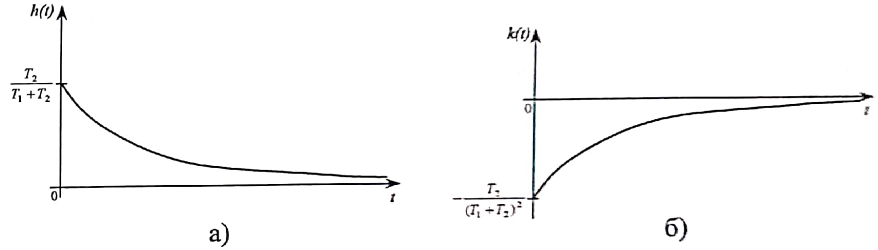


Рис. 6.5 – Графіки перехідної (а) і вагової (б) функцій для прикладу 6.2а

б) $W(p) = \dfrac{2Tp + 2}{2Tp + 3}$, $T > 0$.

Перехідна функція має вигляд:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{2Tp + 2}{p(2Tp + 3)}\right].$$

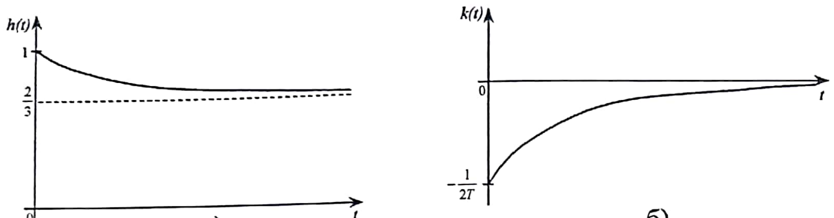
Для знаходження зворотного перетворення Лапласа скористаємось теоремою Хевісайда: $R(p) = 2Tp + 2$, $Q(p) = 2Tp^2 + 3p$, $Q'(p) = 4Tp + 3$; корені знаменника: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\dfrac{3}{2T}$.

Тоді $A_1 = \dfrac{R(0)}{Q'(0)} = \dfrac{2}{3}$, $A_2 = \dfrac{R\left(-\frac{3}{2T}\right)}{Q'\left(-\frac{3}{2T}\right)} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

Перехідна функція дорівнює: $h(t) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} e^{-\frac{3}{2T}t}$.

Вагова функція дорівнює: $k(t) = h'(t) = -\dfrac{1}{2T} e^{-\frac{3}{2T}t}$.

Графіки перехідної і вагової функцій наведено на рис. 6.6.



а) б)

Рис. 6.6 – Графіки перехідної (а) і вагової (б) функцій для прикладу 6.2б

в) $W(p)=\dfrac{T^2p^2}{T^2p^2+3Tp+1}$, $T>0$.

Перехідна функція має вигляд:

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{T^2p}{T^2p^2+3Tp+1}\right].$$

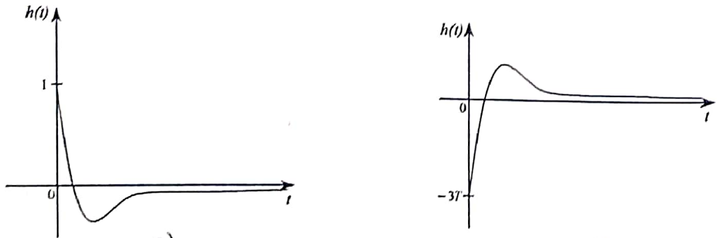
Для знаходження зворотного перетворення скористаємось теоремою Хевісайда: $R(p)=T^2p$, $Q(p)=T^2p^2+3Tp+1$, $Q'(p)=2T^2p+3T$; корені знаменника: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2T}$.

Тоді $A_1=\dfrac{R\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2T}\right)}{Q'\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2T}\right)}=\dfrac{-3\sqrt{5}}{10}$, $A_2=\dfrac{R\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2T}\right)}{Q'\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2T}\right)}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Перехідна функція дорівнює: $h(t)=\dfrac{-3\sqrt{5}+5}{10}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}t}+\dfrac{3\sqrt{5}+5}{10}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}t}$.

Вагова функція дорівнює: $k(t)=h'(t)=\dfrac{7\sqrt{5}-15}{10T}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2T}t}-\dfrac{7\sqrt{5}+15}{10T}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2T}t}$.

Графіки перехідної і вагової функцій наведено на рис. 6.7.



а) б)

Рис. 6.7 – Графіки перехідної (а) і вагової (б) функцій для прикладу 6.2в

Задачі для самостійного розв'язання до теми 6

Задача 6.1. Задана передавальна функція системи. Знайдіть перехідну і вагову функції системи та побудуйте їхні графіки.

а) $W(p)=\dfrac{3p}{2p+1}$; б) $W(p)=\dfrac{p+2}{7p+4}$; в) $W(p)=\dfrac{p+3}{2p^2+p-6}$.

Контрольні запитання до теми 6

Основний рівень

1. Що називається перехідною та ваговою функціями системи?

2. У які способи можна знайти перехідну і вагову функції системи? В чому полягає їхня відмінність?

Поглиблений рівень

1. Який сигнал на практиці є аналогом одиничного ступінчастого; імпульсного сигналу?

2. Що ілюструють графіки перехідної і вагової функцій?

Тема 7 Частотні характеристики динамічної системи

Частотні характеристики системи описують залежності між амплітудою і фазою вхідного і вихідного гармонійних сигналів.

Означення. *Амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ) системи називається наступна функція чисто уявного аргументу:

$$W(i\omega)=\frac{b_m(i\omega)^m+...+b_1 i\omega+b_0}{a_n(i\omega)^n+...+a_1 i\omega+a_0}.$$

АФЧХ може бути формально отримана з передавальної функції $W(p)$ заміною p на $i\omega$. Дійсну та уявну частини АФЧХ звичайно позначають: $U(w)=\mathrm{Re}W(i\omega)$ і $V(w)=\mathrm{Im}W(i\omega)$.

Означення. *Амплітудною частотною характеристикою* (АЧХ) системи називається модуль АФЧХ цієї системи:

$$A(\omega)=|W(i\omega)|=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}.$$

Означення. *Фазовою частотною характеристикою* (ФЧХ) системи називається аргумент АФЧХ цієї системи:

$$\varphi(\omega)=ArgW(i\omega)=arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Означення. *Годографом АФЧХ* називають криву на комплексній площині, яку описує кінець вектора $W(i\omega)$ при зміненні ω від $-\infty$ до $+\infty$.

Годограф АФЧХ на практиці отримують у такі способи:

– знаходженням явної залежності між $U(w)$ і $V(w)$ та подальшою побудовою кривої, заданої неявно;

– побудовою кривої «по точках»;

– використанням засобів математичних пакетів.

Перший із зазначених способів побудови годографа є кращим, оскільки дає можливість проаналізувати характер зображеної кривої.

Приклад 7.1. Знайти частотні характеристики та побудувати годограф АФЧХ системи з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{Tp}{Tp+1}$, $T>0$.

Розв'язання. Знайдемо АФЧХ заданої системи, підставивши в передавальній функції $p=i\omega$: $W(i\omega)=\dfrac{Ti\omega}{Ti\omega+1}$.

Виділимо дійсну та уявну частини АФЧХ, домноживши її чисельник і знаменник на вираз, спряжений до знаменника:

$$W(iw)=\frac{Tiw}{Tiw+1}=\frac{Tiw(1-Tiw)}{(1+Tiw)(1-Tiw)}=\frac{Tiw+T^2w^2}{1+T^2w^2}=\frac{T^2w^2}{1+T^2w^2}+i\frac{Tw}{1+T^2w^2}.$$

Звідси $U(w)=\mathrm{Re}W(i\omega)=\dfrac{T^2w^2}{1+T^2w^2}$, $V(w)=\mathrm{Im}W(i\omega)=\dfrac{Tw}{1+T^2w^2}$.

Тоді АЧХ системи буде мати вигляд:

$$A(\omega)=|W(i\omega)|=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=$$

$$\sqrt{\frac{T^4w^4}{(1+T^2w^2)^2}+\frac{T^2w^2}{(1+T^2w^2)^2}}=\frac{Tw\sqrt{1+T^2w^2}}{1+T^2w^2}=\frac{Tw}{\sqrt{1+T^2w^2}}.$$

ФЧХ відповідно набуде вигляду:

$$\varphi(\omega)=\mathrm{Arg}\,W(i\omega)=\mathrm{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=\mathrm{arctg}\left(\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}:\frac{T^2\omega^2}{1+T^2\omega^2}\right)=\mathrm{arctg}\frac{1}{T\omega}.$$

Продемонструємо побудову шуканого годографа АФЧХ двома способами.

Перший спосіб. Для побудови годографа АФЧХ визначимо явну залежність між $U(\omega)$ і $V(\omega)$. Зазначимо, що $\left(\dfrac{U(\omega)}{V(\omega)}\right)^2=\left(\dfrac{T^2\omega^2}{T\omega}\right)^2=(T\omega)^2$. Тоді, підставивши в $U(\omega)$, отримаємо:

$$U(\omega)=\frac{T^2\omega^2}{1+T^2\omega^2}=\frac{\left(\frac{U(\omega)}{V(\omega)}\right)^2}{1+\left(\frac{U(\omega)}{V(\omega)}\right)^2};$$

$$U(\omega)=\frac{U^2(\omega)}{U^2(\omega)+V^2(\omega)};$$

$$U^2(\omega)+V^2(\omega)-U(\omega)=0;$$

$$\left(U(\omega)-\frac{1}{2}\right)^2+V^2(\omega)=\frac{1}{4}.$$

Отримане рівняння задає на площині коло з центром в точці $\left(\frac{1}{2};0\right)$ і радіусом $\frac{1}{2}$. Отже, годограф АФЧХ – це вказане коло (рис. 7.1). Наприклад, при $\omega=\frac{1}{T}$: $U\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $V\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

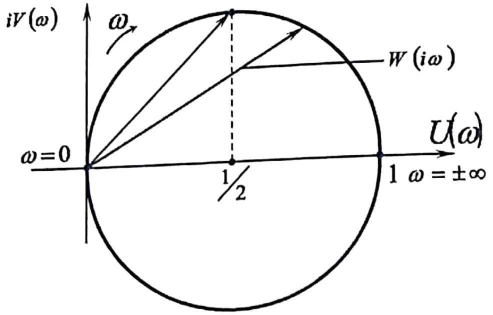


Рис. 7.1 – Годограф АФЧХ для прикладу 7.1

Другий спосіб. Для побудови годографа АФЧХ «по точках» обрахуємо наступну таблицю значень.

ω	0	$\frac{1}{T}$	$\frac{10}{T}$	$\frac{100}{T}$	$\frac{1}{10T}$	$\frac{1}{100T}$	$+\infty$
$U(\omega)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{100}{101}$	$\frac{10000}{10001}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{10001}$	1
$V(\omega)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{101}$	$\frac{100}{10001}$	$\frac{10}{101}$	$\frac{100}{10001}$	0

Зазначимо, що через властивості частотних характеристик $U(-\omega)=U(\omega)$, $V(-\omega)=-V(\omega)$, тому таблиця містить тільки невід'ємні значення ω. Шукану криву будуємо для додатніх значень ω, частину кривої для від'ємних значень ω отримуємо симетричним відображенням відносно дійсної осі (див. рис. 7.2). Напрям обходу по кривій визначаємо, рухаючись від меншого значення ω до більшого.

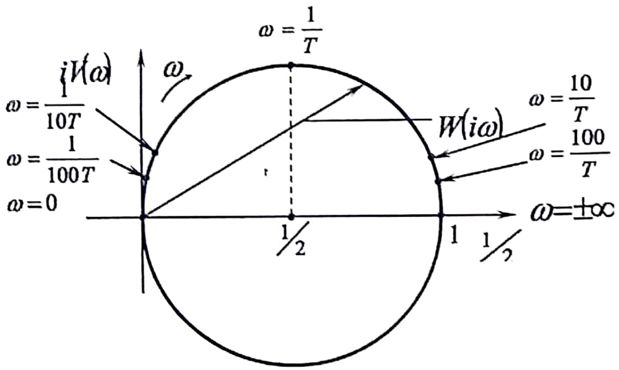


Рис. 7.2 – Годограф АФЧХ для прикладу 7.1, побудований «по точках»

Приклад 7.2. Знайти частотні характеристики і побудувати годограф АФЧХ системи з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{T_2 p}{(T_1+T_2)p+1}$, $T_1, T_2>0$.

Розв'язання. Знайдемо АФЧХ системи.

$$W(iw)=\frac{T_1 iw}{(T_1+T_2)iw+1}=\frac{T_2 iw(1-(T_1+T_2)iw)}{(1+(T_1+T_2)iw)(1-(T_1+T_2)iw)}=$$

$$=\frac{T_2 iw+T_2(T_1+T_2)w^2}{1+(T_1+T_2)^2w^2}=\frac{T_2(T_1+T_2)w^2}{1+(T_1+T_2)w^2}+i\frac{T_2 w}{1+(T_1+T_2)^2w^2}.$$

Дійсна і уявна частини дорівнюють:

$$U(w)=\operatorname{Re}W(i\omega)=\frac{T_2(T_1+T_2)w^2}{1+(T_1+T_2)^2w^2},\quad V(w)=\operatorname{Im}W(i\omega)=\frac{T_2 w}{1+(T_1+T_2)^2w^2}.$$

Тоді АЧХ системи має вигляд:

$$A(\omega)=|W(i\omega)|=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\sqrt{\frac{T_2^2(T_1+T_2)^2w^4}{\left(1+(T_1+T_2)^2w^2\right)^2}+\frac{T_2^2w^2}{\left(1+(T_1+T_2)^2w^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{T_2^2(T_1+T_2)^2w^4+T_2^2w^2}}{1+(T_1+T_2)^2w^2}=\frac{T_2 w}{\sqrt{1+(T_1+T_2)^2w^2}}.$$

ФЧХ має вигляд:

$$\varphi(\omega)=\operatorname{Arg}W(i\omega)=\operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=\operatorname{arctg}\left(\frac{T_2 w}{1+(T_1+T_2)^2w^2}:\frac{T_2(T_1+T_2)w^2}{1+(T_1+T_2)^2w^2}\right)=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1}{(T_1+T_2)^2\omega}.$$

Для побудови годографа АФЧХ визначимо явну залежність між $U(\omega)$ та $V(\omega)$. Зазначимо, що $\dfrac{U(\omega)}{V(\omega)}=\dfrac{T_2(T_1+T_2)\omega^2}{T_2 w}=(T_1+T_2)w$. Тоді:

$$V(\omega)=\frac{\dfrac{T_2U(w)}{(T_1+T_2)V(w)}}{1+\dfrac{U^2(w)}{V^2(w)}};$$

$$V^2(\omega)\left(1+\frac{U^2(w)}{V^2(w)}\right)=\frac{T_2U(w)}{(T_1+T_2)};$$

$$U^2(\omega)+V^2(\omega)=\frac{T_2U(\omega)}{T_1+T_2};$$

$$\left(U(\omega)-\frac{T_2}{2(T_1+T_2)}\right)^2+V^2(\omega)=\left(\frac{T_2}{2(T_1+T_2)}\right)^2.$$

Годограф АФЧХ на комплексній площині представляє собою коло з центром в точці $\left(\frac{T_2}{2(T_1+T_2)};0\right)$ і радіусом $\frac{T_2}{2(T_1+T_2)}$ (рис. 7.3).

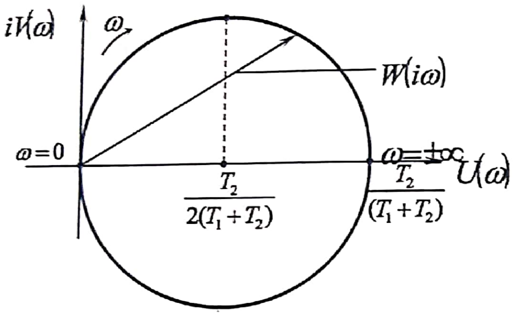


Рис. 7.3 – Годограф АФЧХ для прикладу 8.2

Задачі для самостійного розв'язання до теми 7

Задача 7.1. Задана передавальна функція системи. Знайдіть АФЧХ, АЧХ і ФЧХ системи і побудуйте годограф її АФЧХ.

а) $W(p)=\frac{T_1 p}{T_2 p+1}$, $T_1, T_2>0$; б) $W(p)=\frac{3p+5}{2p+4}$;

в) $W(p)=\frac{2p+11}{p^2-2p+4}$.

Контрольні запитання до теми 7

Основний рівень

1. Які характеристики належать до частотних характеристик системи?
2. Що таке годограф АФЧХ?
3. Опишіть можливі способи побудови годографа АФЧХ. Як визначити напрям обходу годографа?

Поглиблений рівень

1. Що ілюструє годограф АФЧХ на комплексній площині?
2. Які властивості мають частотні характеристики?

Тема 8 Типові ланки динамічних систем

Будь-яка динамічна система може бути розглянута як з'єднання семи або менше типів ланок. Класифікацію типових ланок здійснюють, розглядаючи різні частинні форми диференціального рівняння опису функціонування системи в часі. Для визначення того, які типові ланки складають систему, її передавальну функцію доцільно представити в стандартному вигляді:

$$W(p)=\frac{K\,p^{u}\prod_{k=1}^{\mu}(T_k p+1)\cdot\prod_{j=1}^{\eta}\left(C_j^2p^2+2C_j\xi_j p+1\right)}{p^{\nu}\prod_{l=1}^{\rho}(\tau_l p+1)\cdot\prod_{r=1}^{\sigma}\left(S_r^2p^2+2S_r\psi_r p+1\right)}, \tag{8.1}$$

причому вхідні у виразі (8.1) многочлени 2-го степеня мають комплексні корені.

Вираження (8.1) передавальною функцією має 7 типів співмножників, тому виділяють 7 типових ланок відповідно виду співмножника. Типові ланки мають такі назви, обумовлені властивостями тієї чи іншої ланки:

1) посилююча: $W(p)=K$;

2) чисто диференціююча: $W(p)=p$;

3) диференціююча першого порядку $W(p)=Tp+1$;

4) диференціююча другого порядку: $W(p)=C^2p^2+2C\xi\,p+1$;

5) інтегруюча: $W(p)=\frac{1}{p}$;

6) аперіодна: $W(p)=\frac{1}{\tau p+1}$;

7) коливальна: $W(p)=\frac{1}{S^2p^2+2S\psi\,p+1}$.

Приклад 8.1. Визначити, які ланки і з якими параметрами складають систему з передавальною функцією $W(p)=\frac{2p+1}{3p^2+4p}$.

Розв'язання. Перетворимо передавальну функцію до стандартного вигляду (8.1):

$$W(p)=\frac{2p+1}{3p^2+4p}=\frac{2p+1}{4p\left(\frac{3}{4}p+1\right)}=\frac{\frac{1}{4}(2p+1)}{p\left(\frac{3}{4}p+1\right)}.$$

Отже, система містить 4 типові ланки:

1) посилююча ланка з параметром $K=\frac{1}{4}$;

2) диференціююча ланка 1-го порядку з параметром $\tau = 2$;

3) інтегруюча ланка;

4) аперіодна ланка з параметром $T = \dfrac{3}{4}$.

Приклад 8.2. Визначити, які ланки і з якими параметрами складають систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{4p^3 + 2p}{3p^2 + p + 5}$.

Розв'язання. Перетворимо передавальну функцію до стандартного вигляду (8.1):

$$W(p) = \frac{4p^3 + 2p}{3p^2 + p + 5} = \frac{2p\left(2p^2 + 1\right)}{5\left(\frac{3}{5}p^2 + \frac{1}{5}p + 1\right)} = \frac{\frac{2}{5}p\left(2p^2 + 1\right)}{\frac{3}{5}p^2 + \frac{1}{5}p + 1}.$$

Зазначимо, що рівняння $2p^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{5}p^2 + \frac{1}{5}p + 1 = 0$ не мають дійсних коренів, отже, відповідний поліном розкладати на множники не варто.

Отже, система містить 4 типові ланки:

1) посилююча ланка з параметром $K = \dfrac{2}{5}$;

2) чисто диференціююча ланка;

3) диференціююча ланка 2-го порядку з параметрами $C = \sqrt{2}$, $\xi = 0$;

4) коливальна ланка з параметрами $S = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $\psi = \dfrac{\sqrt{5}}{10\sqrt{3}}$.

Приклад 8.3. Визначити, які ланки і з якими параметрами складають систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{3p^4 + 4p^3 + p^2}{(2p+3)\left(3p^2 + 2p + 6\right)}$.

Розв'язання. Перетворимо передавальну функцію до стандартного вигляду (8.1).

$$W(p) = \frac{3p^4 + 4p^3 + p^2}{(2p+3)\left(3p^2 + 2p + 6\right)} = \frac{p^2\left(3p^2 + 4p + 1\right)}{3\left(\frac{2}{3}p + 1\right)\cdot\left(3p^2 + 2p + 6\right)}.$$

Зазначимо, що поліном $3p^2 + 4p + 1$ має два дійсні корені $p_1 = -1$, $p_2 = -\dfrac{1}{3}$, а поліном $3p^2 + 2p + 6$ дійсних коренів не має. Отже,

$$W(p) = \frac{p^2\left(3p^2 + 4p + 1\right)}{3\left(\frac{2}{3}p + 1\right)\cdot\left(3p^2 + 2p + 6\right)} = \frac{3p^2(p+1)\left(p + \frac{1}{3}\right)}{3\left(\frac{2}{3}p + 1\right)\cdot 6\left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p + 1\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{18}p^2(p+1)(3p+1)}{\left(\frac{2}{3}p + 1\right)\left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p + 1\right)}.$$

Система містить 7 типових ланок:

1) посилююча ланка з параметром $K = \dfrac{1}{18}$;

2), 3) дві чисто диференціюючих ланки;

4) диференціююча ланка 1-го порядку з параметром $\tau_1 = 1$;

5) диференціююча ланка 1-го порядку з параметром $\tau_2 = 3$;

6) аперіодна ланка з параметром $T = \dfrac{2}{3}$;

7) коливальна ланка з параметрами $S = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $\psi = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Приклад 8.4. Визначити, які ланки і з якими параметрами складають систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{3p^2 + 5p + 2}{\left(4p^2 + 4\right)\left(2p^2 + p\right)}$.

Розв'язання. Перетворимо передавальну функцію до стандартного вигляду (8.1).

$$W(p) = \frac{3p^2 + 5p + 2}{\left(4p^2 + 4\right)\left(2p^2 + p\right)} = \frac{3(p+1)\left(p + \frac{2}{3}\right)}{4p\left(p^2 + 1\right)(2p+1)} = \frac{\frac{1}{2}(p+1)\left(\frac{3}{2}p + 1\right)}{p\left(p^2 + 1\right)(2p+1)}.$$

Система містить 6 типових ланок:

1) посилююча ланка з параметром $K = \dfrac{1}{2}$;

2) диференціююча ланка 1-го порядку з параметром $\tau_1 = 1$;

3) диференціююча ланка 1-го порядку з параметром $\tau_2 = \dfrac{3}{2}$;

4) інтегруюча ланка;

5) аперіодна ланка з параметром $T = 2$;

6) коливальна ланка з параметрами $S = 1$, $\psi = 0$.

Задачі для самостійного розв'язання до теми 8

Задача 8.1. Визначити, які ланки і з якими параметрами складають системи:

а) $W(p)=\dfrac{2p+7}{p^2+9}$; б) $W(p)=\dfrac{2p^2+3p}{p^2+4p+1}$; в) $W(p)=\dfrac{3p+9}{2p^2+4p+5}$.

Контрольні запитання до теми 8

Основний рівень

1. Перерахуйте назви і передавальні функції типових ланок.
2. До якого вигляду потрібно привести передавальну функцію для визначення ланок, які складають систему?

Поглиблений рівень

1. Яким типовим ланкам відповідають співмножники чисельника передавальної функції; знаменника передавальної функції?
2. Диференціальні рівняння яких порядків описують типові ланки системи?

Тема 9 Логарифмічна амплітудна частотна характеристика

Означення. *Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою* (ЛАЧХ) системи називається крива, що відповідає 20 десятковим логарифмам модуля АФЧХ заданої системи, побудована в десятковому логарифмічному маштабі частот: $L(\omega)=20\lg|W(i\omega)|=20\lg A(\omega)$.

Для побудови ескіза ЛАЧХ зручно використовувати інформацію про типові ланки, що складають систему, ЛАЧХ яких прості та наведені далі. Згідно з властивостями типових ланок, ЛАЧХ системи дорівнює сумі ЛАЧХ складових її типових ланок. Для спрощення побудови замість графіків ЛАЧХ типових ланок можна використовувати графіки асимптот ЛАЧХ, що сполучаються.

Ескізи ЛАЧХ для типових ланок

1. Посилююча ланка: $W(p)=K$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=20\lg|W(i\omega)|=20\lg|K|$.

Графік ЛАЧХ посилюючої ланки наведено на рис. 9.1.

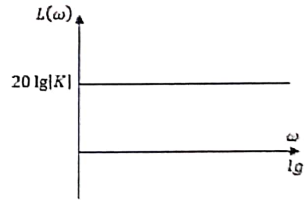


Рис. 9.1 – Графік ЛАЧХ посилюючої ланки

2. Чисто диференціююча ланка: $W(p)=p$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=20\lg|\omega|$.

Графік ЛАЧХ чисто диференціюючої ланки наведено на рис. 9.2.

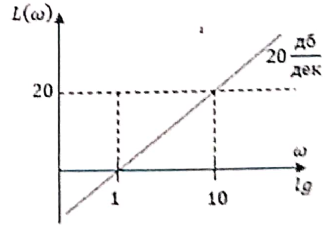


Рис. 9.2 – Графік ЛАЧХ чисто диференціюючої ланки

3. Диференціююча ланка першого порядку: $W(p)=Tp+1$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$.

Графік ЛАЧХ диференціюючої ланки першого порядку ланки наведено на рис. 9.3 (пунктирна лінія – графік ЛАЧХ, суцільні лінії – графіки асимптот, що сполучаються).

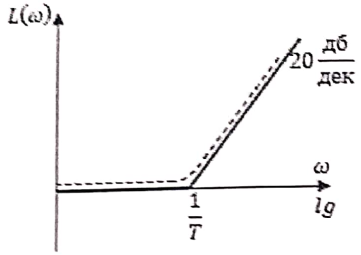


Рис. 9.3 – Графік ЛАЧХ диференціюючої ланки першого порядку

4. Диференціююча ланка другого порядку: $W(p)=C^2p^2+2\xi Cp+1$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=20\lg\sqrt{\left(1-C^2\omega^2\right)^2+4\xi^2C^2\omega^2}$.

Графік ЛАЧХ диференціюючої ланки другого порядку ланки наведено на рис. 9.4 (пунктирна лінія – графік ЛАЧХ, суцільні лінії – графіки асимптот, що сполучаються).

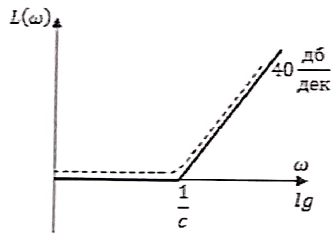


Рис. 9.4 – Графік ЛАЧХ диференціюючої ланки другого порядку

5. Інтегруюча ланка: $W(p)=\frac{1}{p}$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=-20\lg|\omega|$.

Графік ЛАЧХ інтегруючої ланки наведено на рис. 9.5.

6. Аперіодна ланка: $W(p)=\frac{1}{\tau p+1}$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$.

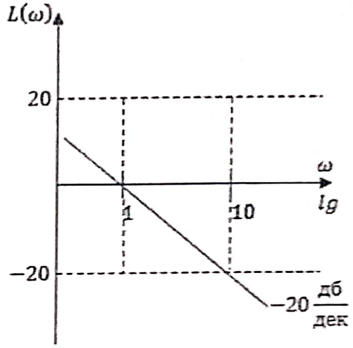


Рис. 9.5 – Графік ЛАЧХ інтегруючої ланки

Графік ЛАЧХ аперіодної ланки наведено на рис. 9.6 (пунктирна лінія – графік ЛАЧХ, суцільні лінії – графіки асимптот, що сполучаються).

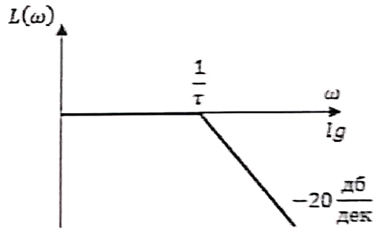


Рис. 9.6 – Графік ЛАЧХ аперіодної ланки

7. Коливальна ланка: $W(p)=\frac{1}{S^2p^2+2\psi Sp+1}$.

ЛАЧХ ланки: $L(\omega)=-20\lg\sqrt{\left(1-S^2\omega^2\right)^2+4\psi^2S^2\omega^2}$.

Графік ЛАЧХ коливальної ланки наведено на рис. 9.7 (пунктирна лінія – графік ЛАЧХ, суцільні лінії – графіки асимптот, що сполучаються).

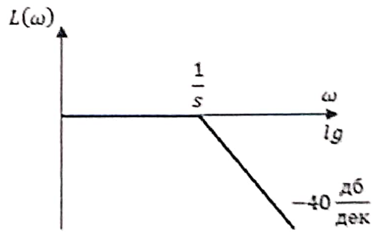


Рис. 9.7 – Графік ЛАЧХ коливальної ланки

Приклад 9.1. Знайти ЛАЧХ і побудувати її графік в логарифмічному маштабі частот для системи з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{3p}{2p+5}$.

Розв'язання. Запишемо вираження ЛАЧХ цієї системи.

$$W(iw)=\frac{3iw}{2iw+5}=\frac{iw(5-2iw)}{25+4w^2}=\frac{6w^2+15iw}{25+4w^2}.$$

$$A(w)=\sqrt{\frac{36w^4+225w^2}{(25+4w^2)^2}}=3w\sqrt{\frac{4w^2+25}{(25+4w^2)^2}}=\frac{3w}{\sqrt{25+4w^2}}.$$

$$L(w)=20\lg\frac{3w}{\sqrt{25+4w^2}}=20\lg 3w-20\lg\sqrt{25+4w^2}.$$

Побудову ескіза ЛАЧХ здійснимо за такою схемою:

1) визначимо, які типові ланки і з якими параметрами складають цю систему;

2) зобразимо ескізи ЛАЧХ або асимптот ЛАЧХ, що сполучаються, всіх типових ланок, які складають систему;

3) випишемо рівняння відповідних ЛАЧХ;

4) за результатами виконання пп. 2), 3) визначимо «ключові» точки на осі ω і здійснимо їхнє коректне розміщення з урахуванням того, що вісь ω має десятковий логарифмічний маштаб;

5) визначимо нахили на кожній ділянці, утвореній виявленими ключовими точками;

6) обчислимо значення результуючої ЛАЧХ в деяких ключових точках;

7) побудуємо ескіз результуючої ЛАЧХ.

Виділимо типові ланки системи. Для цього подамо передавальну функцію у вигляді:

$$W(p)=\frac{3p}{2p+5}=\frac{\frac{3}{5}p}{\frac{2}{5}p+1}.$$

Система має 3 типові ланки:

1) посилююча ланка, $W_1(p)=\frac{3}{5}$, параметр $K=\frac{3}{5}$;

2) чисто диференціююча ланка, $W_2(p)=p$;

3) аперіодна ланка, $W_3(p)=\dfrac{1}{\frac{2}{5}p+1}$, параметр $\tau=\frac{2}{5}$.

Побудуємо графіки ЛАЧХ $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$ типових ланок системи, використавши відомі властивості типових ланок (для аперіодної ланки побудуємо графік асимптот, що сполучаються, $L_3'(\omega)$, див. рис. 9.8–9.10).

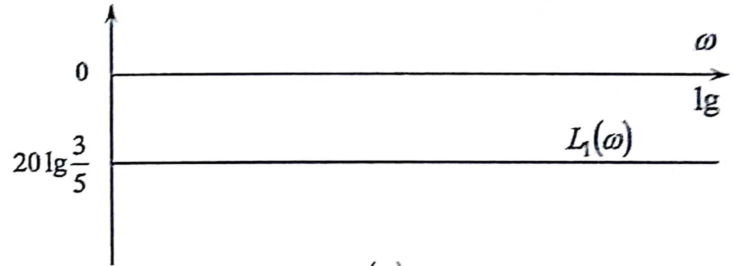


Рис. 9.8 – Графік $L_1(\omega)$ для прикладу 9.1

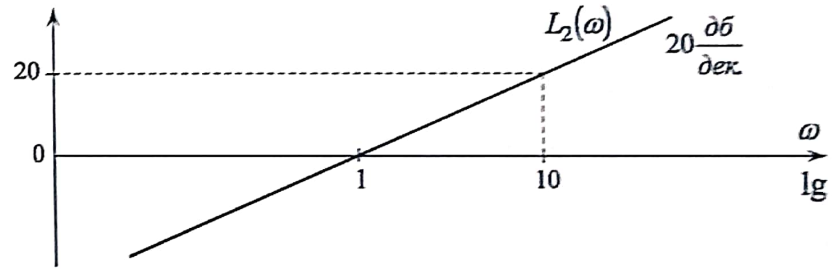


Рис. 9.9 – Графік $L_2(\omega)$ для прикладу 9.1

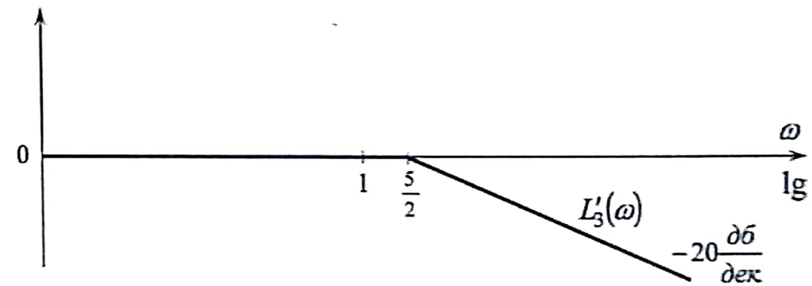


Рис. 9.10 – Графік $L_3'(\omega)$ для прикладу 9.1

Відповідно до властивостей типових ланок, результуюча асимптота ЛАЧХ дорівнює:

$$L'(\omega)=L_1(\omega)+L_2(\omega)+L_3'(\omega).$$

Випишемо рівняння відповідних ЛАЧХ і асимптот.

$L_1(w) = 20\lg\frac{3}{5}$, причому $20\lg\frac{3}{5} \approx -4{,}44$;

$L_2(\omega) = 20\lg w$;

$$L_3'(\omega) = \begin{cases} -20\lg\frac{2}{5}w, w > \frac{5}{2}, \\ 0, w \le \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ключовою точкою на осі ω в цьому випадку є $\omega = \frac{5}{2}$ (в цій точці змінюється нахил $L_3'(\omega)$), для розміщення на осі ω обчислимо: $\lg\frac{5}{2} \approx 0{,}38$.

Обчислимо нахили асимптоти на інтервалах $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ і $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$:

при $\omega \in \left(0;\frac{5}{2}\right)$ нахил асимптоти дорівнює: $(0+0+20) = 20\left(\frac{дб}{дек.}\right)$;

при $\omega \in \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$ нахил асимптоти дорівнює: $(0+20-20) = 0\left(\frac{дб}{дек.}\right)$.

Обчислимо значення асимптоти ЛАЧХ в ключових точках. При $\omega=1$ значення асимптоти дорівнює:

$$L'(1) = L_1(1) + L_2(1) + L_3'(1) = 20\lg\frac{3}{5} + 20\lg 1 + 0 \approx -4{,}44.$$

При $\omega = \frac{5}{2}$ значення асимптоти дорівнює:

$$L'\left(\frac{5}{2}\right) = L_1\left(\frac{5}{2}\right) + L_2\left(\frac{5}{2}\right) + L_3'\left(\frac{5}{2}\right) = 20\lg\frac{3}{5} + 20\lg\frac{5}{2} + 0 = 20\lg\frac{3}{2} \approx 3{,}52.$$

Шуканий графік асимптот, що сполучаються, ЛАЧХ наведено на рис. 9.11.

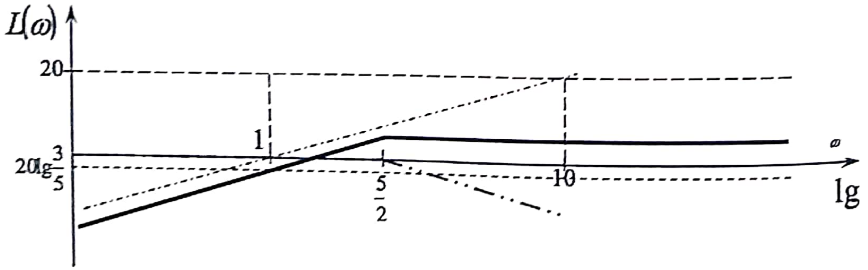


Рис. 9.11 – Графік $L'(\omega)$ для прикладу 9.1

Приклад 9.2. Знайти ЛАЧХ і побудувати її графік в логарифмічному маштабі частот для системи з передавальною функцією $W(p) = \frac{4p^2(p+3)}{(4p^2+1)(2p+5)}$.

Розв'язання. Запишемо вираження ЛАЧХ заданої системи.

$$W(iw) = \frac{4(iw)^2(iw+3)}{(4(iw)^2+1)(2iw+5)} = \frac{-4iw^3-12w^2}{(1-4w^2)(5+2iw)} = \frac{(-4iw^3-12w^2)(5-2iw)}{(1-4w^2)(25+4w^2)} =$$

$$= \frac{8w^4-60w^2}{(1-4w^2)(25+4w^2)} + i\frac{4w^3}{(1-4w^2)(25+4w^2)}.$$

$$A(w) = \sqrt{\frac{64w^8-960w^6+3600w^4-16w^6}{(1-4w^2)^2(25+4w^2)^2}} = w^2\frac{\sqrt{64w^4-976w^2+3600}}{(1-4w^2)(25+4w^2)}.$$

$$L(w) = 20\lg w^2\frac{\sqrt{64w^4-976w^2+3600}}{(1-4w^2)(25+4w^2)}.$$

Побудуємо графік асимптот, що сполучаються, ЛАЧХ як суму графіків асимптот, що сполучаються, типових ланок, які входять в систему.

Відилимо типові ланки системи.

$$W(p) = \frac{4p^2(p+3)}{(4p^2+1)(2p+5)} = \frac{\frac{12}{5}p^2\left(\frac{1}{3}p+1\right)}{\left(\frac{2}{5}p+1\right)(4p^2+1)}.$$

Система має 6 типових ланок:

1) посилююча, $W_1(p) = \frac{12}{5}$, $K = \frac{12}{5}$;

2), 3) дві чисто диференціюючі, $W_2(p) = W_3(p) = p$;

4) диференціююча 1-го порядку, $W_4(p) = \frac{1}{3}p+1$, $T = \frac{1}{3}$;

5) коливальна, $W_5(p) = \frac{1}{4p^2+1}$, $S = 2$;

6) аперіодна $W_6(p) = \frac{1}{\frac{2}{5}p+1}$, $\tau = \frac{2}{5}$.

Побудуємо графіки ЛАЧХ $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$ і асимптот ЛАЧХ $L_4'(\omega)$, $L_5'(\omega)$, $L_6'(\omega)$ типових ланок системи, використовуючи відомі властивості типових ланок (рис. 9.12–9.17).

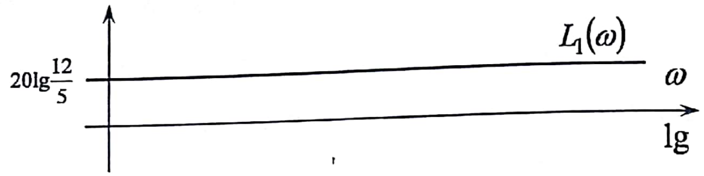


Рис. 9.12 – Графік $L_1(\omega)$ для прикладу 9.2

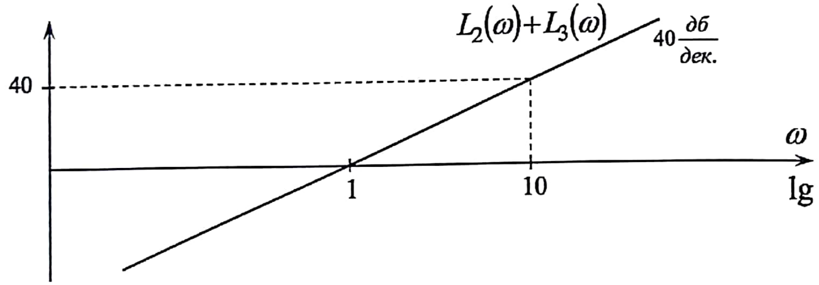


Рис. 9.13 – Графік $L_2(\omega)+L_3(\omega)$ для прикладу 9.2

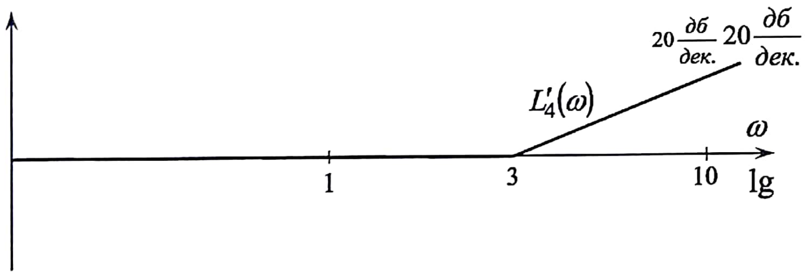


Рис. 9.14 – Графік $L_4'(\omega)$ для прикладу 9.2

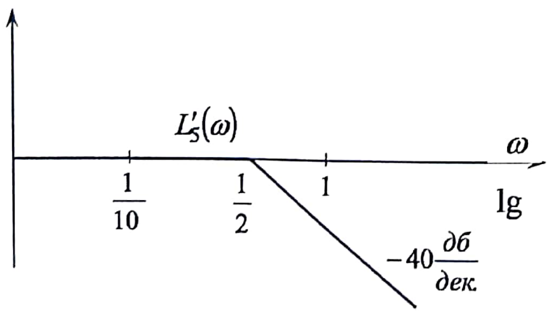


Рис. 9.15 – Графік $L_5'(\omega)$ для прикладу 9.2

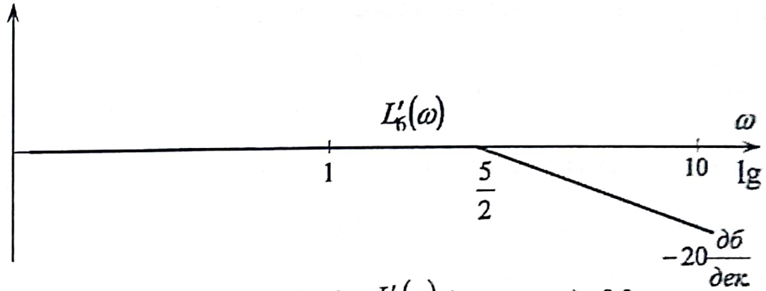


Рис. 9.16 – Графік $L_6'(\omega)$ для прикладу 9.2

Відповідно до властивостей типових ланок, результуюча асимптота ЛАЧХ дорівнює

$$L'(\omega)=L_1(\omega)+L_2(\omega)+L_3(\omega)+L_4'(\omega)+L_5'(\omega)+L_6'(\omega).$$

Випишемо рівняння відповідних ЛАЧХ і асимптот.

$L_1(\omega)=20\lg\frac{12}{5}$, причому $20\lg\frac{12}{5}\approx 7{,}6$.

$L_2(\omega)=L_3(\omega)=20\lg\omega;$

$$L_4'(\omega)=\begin{cases}20\lg\frac{1}{3}\omega, & \omega>3,\\ 0, & \omega\le 3;\end{cases}$$

$$L_5'(\omega)=\begin{cases}-40\lg 2\omega, & \omega>\frac{1}{2},\\ 0, & \omega\le\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$L_6'(\omega)=\begin{cases}-20\lg\frac{2}{5}\omega, & \omega>\frac{5}{2},\\ 0, & \omega\le\frac{5}{2}.\end{cases}$$

Ключовими точками на осі ω в цьому випадку є $\omega_1=\frac{1}{2}$, $\omega_2=\frac{5}{2}$, $\omega_3=3$; для коректного розміщення цих точок на осі ω обчислимо: $\lg\frac{1}{2}\approx -0{,}30$, $\lg\frac{5}{2}\approx 0{,}38$, $\lg 3\approx 0{,}48$.

Визначимо нахили асимптоти на інтервалах $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2};3\right)$ і $(3;+\infty)$.

При $\omega\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ нахил асимптоти дорівнює: $(0+40+0+0+0)=40\left(\frac{дб}{дек.}\right)$;

при $\omega \in \left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ нахил асимптоти $(0+40-40+0+0)=0\left(\frac{дб}{дек.}\right)$;

при $\omega \in \left(\frac{5}{2};3\right)$ нахил асимптоти дорівнює: $(0+40-40-20+0)=-20\left(\frac{дб}{дек.}\right)$;

при $\omega \in (3;+\infty)$ нахил асимптоти дорівнює: $(0+40-40-20+20)=-20\left(\frac{дб}{дек.}\right)$.

Обчислимо значення асимптоти ЛАЧХ в ключових точках.

$$L'\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{6}L_k\left(\frac{1}{2}\right)=20\lg\frac{12}{5}+40\lg\frac{1}{2}+0=20\lg\frac{3}{5}\approx-4{,}44;$$

$$L'\left(\frac{5}{2}\right)=L'\left(\frac{1}{2}\right)=20\lg\frac{3}{5}\approx-4{,}44;$$

$$L'(3)=\sum_{k=1}^{6}L_k(3)=20\lg\frac{12}{5}+40\lg3+0-40\lg6-20\lg\frac{6}{5}=20\lg\frac{1}{5}\approx-6{,}02.$$

Шуканий графік асимптот, що сполучаються, ЛАЧХ наведено на рис. 9.17.

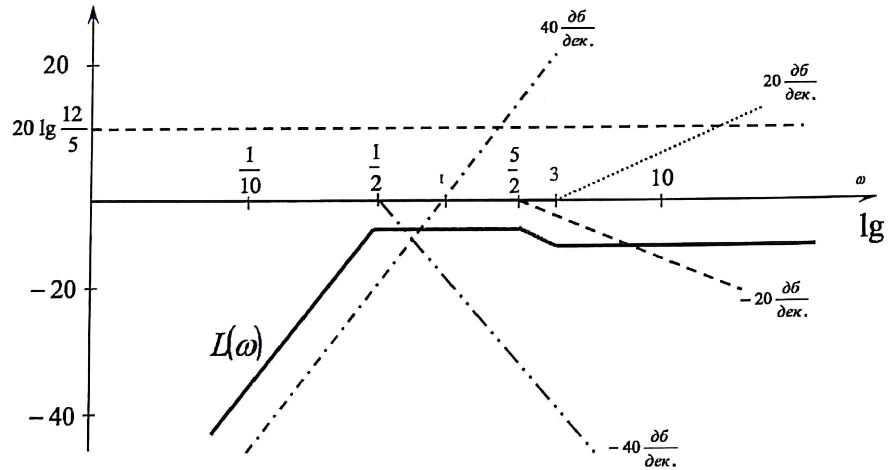


Рис. 9.17 – Графік $L'(\omega)$ для прикладу 9.2

Задачі для самостійного розв'язання до теми 9

Задача 9.1. Знайти ЛАЧХ і побудувати її графік в логарифмічному маштабі частот для системи з передавальною функцією:

а) $W(p)=\dfrac{2p+7}{p^2+9}$; б) $W(p)=\dfrac{2p^2+3p}{p^2+4p+1}$; в) $W(p)=\dfrac{3p+9}{2p^2+4p+5}$.

Контрольні запитання до теми 9

Основний рівень

1. Сформулюйте означення ЛАЧХ динамічної системи.

2. У чому полягає відмінність логарифмічного маштабу осі від звичайного? До чого це призводить?

Поглиблений рівень

1. Сформулюйте властивості типових ланок, що дозволяють полегшити побудову ескіза ЛАЧХ динамічної системи.

2. Перерахуйте етапи, які виконуються при побудові ескіза ЛАЧХ за допомогою інформації про типові ланки.

Тема 10 Асимптотична стійкість динамічної системи

Означення. Динамічна система називається *асимптотично стійкою*, якщо вільний рух системи (вільні коливання системи) після зняття збурення з плином часу затухає.

Якщо функціонування системи описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m y}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y(t), \qquad (10.1)$$

то факт зняття збурення означає $y(t) \equiv 0$, тоді вільний рух системи є розв'язком рівняння:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x(t) = 0, \qquad (10.2)$$

з урахуванням деяких початкових умов.

Отже, фраза «вільний рух системи з плином часу затухає» означає, що $\lim\limits_{t\to\infty} x_{св}(t) = 0$, де $x_{св}(t)$ – розв'язок диференціального рівняння (10.2).

Приклад 10.1. Дослідити на стійкість за означенням систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{2p+3}{p^2-3p+2}$.

Розв'язання. Знайдемо функцію $x_{св}(t)$, що визначає вільні коливання системи. Для цього запишемо диференціальне рівняння системи.

$$W(p) = \frac{2p+3}{p^2-3p+2} = \frac{X(p)}{Y(p)};$$

$$(p^2-3p+2)X(p) = (2p+3)Y(p);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x(t) = 2\frac{dy}{dt} + 3y(t).$$

Припустивши в отриманому диференціальному рівнянні $y(t) \equiv 0$, отримуємо рівняння для визначення вільних коливань системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Характеристичний поліном рівняння: $D(p) = p^2 - 3p + 2$, його корені: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тоді $x_{св}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, C_1, C_2 \in R$.

Зазначимо, що характеристичний поліном рівняння $D(p) = p^2 - 3p + 2$

співпадає зі знаменником передавальної функції, – цим фактом будемо надалі користуватися.

Для встановлення стійкості системи знайдемо $\lim\limits_{t\to\infty} x_{св}(t)$.

$$\lim_{t\to\infty} x_{св}(t) = \lim_{t\to\infty}(C_1 e^t + C_2 e^{2t}) = \pm\infty \neq 0.$$

Отже, система не є асимптотично стійкою.

Приклад 10.2. Дослідити на стійкість за означенням систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{4p+10}{2p^2-p+5}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичний поліном цієї системи: $D(p) = 2p^2 - p + 5$. Диференціальне рівняння для визначення $x_{св}(t)$ має вигляд: $2\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$.

Корені $D(p)$: $\lambda_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{39}}{4}$, $\lambda_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{39}}{4}$.

Тоді $x_{св}(t) = e^{\frac{1}{4}t}\left(C_1 \sin(\frac{\sqrt{39}}{4}t) + C_2 \cos(\frac{\sqrt{39}}{4}t)\right), C_1, C_2 \in R$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} x_{св}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{1}{4}t}\left(C_1 \sin(\frac{\sqrt{39}}{4}t) + C_2 \cos(\frac{\sqrt{39}}{4}t)\right) = \pm\infty \neq 0$, то система не є асимптотично стійкою.

Приклад 10.3. Дослідити на стійкість за означенням систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{5p+12}{(p+1)^2(p-2)}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичний поліном цієї системи: $D(p) = (p+1)^2(p-2) = p^3 - 3p - 2$. Диференціальне рівняння для визначення $x_{св}(t)$ має вигляд:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Корені $D(p)$: $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Тоді $x_{св}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{2t}, C_1, C_2, C_3 \in R$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} x_{св}(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{2t}\right) = \pm\infty \neq 0$, то система не є асимптотично стійкою.

Приклад 10.4. Дослідити на стійкість за означенням систему з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{3p+1}{p^3+2p^2+p}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичний поліном цієї системи: $D(p)=p^3+2p^2+p$. Диференціальне рівняння для визначення $x_{св}(t)$ має вигляд:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=0.$$

Корені $D(p)$: $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=0$.

Тоді $x_{св}(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3, C_1,C_2,C_3\in R$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}x_{св}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3\right)=C_3\neq 0$ в загальному випадку, то система не є асимптотично стійкою.

Приклад 10.5. Дослідити на стійкість за означенням систему з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{2p^2+5p}{p^2+4p+4}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичний поліном цієї системи: $D(p)=p^2+4p+4$. Диференціальне рівняння для визначення $x_{св}(t)$ має вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

Корені $D(p)$: $\lambda_{1,2}=-2$. Тоді $x_{св}(t)=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}, C_1,C_2\in R$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}x_{св}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}\right)=0$, то система є асимптотично стійкою.

Ознака асимптотичної стійкості

Твердження (ознака асимптотичної стійкості). Динамічна система є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли всі корені її характеристичного рівняння мають від'ємну дійсну частину.

Приклад 6. Дослідити на стійкість за допомогою ознаки асимптотичної стійкості системи з передавальними функціями:

а) $W(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-3p+2}$; б) $W(p)=\dfrac{4p+10}{2p^2-p+5}$; в) $W(p)=\dfrac{5p+12}{(p+1)^2(p-2)}$;

г) $W(p)=\dfrac{3p+1}{p^3+2p^2+p}$; д) $W(p)=\dfrac{2p^2+5p}{p^2+4p+4}$.

Розв'язання. Зазначимо, що для застосування ознаки асимптотичної стійкості необхідні корені характеристичного рівняння системи, які для заданих систем а)–д) знайдені в прикладах 10.1–10.5. Отже:

а) корені характеристичного рівняння $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

Оскільки $\mathrm{Re}(\lambda_1)=1>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2)=2>0$, то система не є асимптотично стійкою;

б) корені характеристичного рівняння $\lambda_1=\dfrac{1-i\sqrt{39}}{4}$, $\lambda_2=\dfrac{1+i\sqrt{39}}{4}$.

Оскільки $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\dfrac{1}{4}>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2)=\dfrac{1}{4}>0$, то система не є асимптотично стійкою;

в) корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=2$.

Оскільки $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)-1<0$, а $\mathrm{Re}(\lambda_3)=2>0$, то система не є асимптотично стійкою;

г) корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=0$.

Оскільки $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)=-1<0$, а $\mathrm{Re}(\lambda_3)=0$, то система не є асимптотично стійкою;

д) корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}=-2$.

Оскільки $\mathrm{Re}(\lambda_1)=\mathrm{Re}(\lambda_2)=-2<0$, то система асимтотично стійка.

Як випливає із розглянутих прикладів, використання ознаки асимптотичної стійкості суттєво полегшує дослідження системи, але потребує обчислення коренів полінома, що за високих порядків є трудомісткою задачею.

Необхідна умова асимптотичної стійкості

Твердження (необхідна умова стійкості). Якщо ДС є асимптотично стійкою, то всі коефіцієнти її характеристичного рівняння мають один знак.

Дана умова є достатньою умовою стійкості для систем з порядком характеристичного рівняння не більше 2.

Приклад 10.7. Перевірити виконання необхідної умови асимптотичної стійкості для систем із заданими передавальними функціями. Зробити висновок про стійкість систем:

а) $W(p)=\dfrac{2p+1}{p^3-2p^2+3p+1}$; б) $W(p)=\dfrac{p+5}{p^2+3p+17}$;

в) $W(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+3p+2}$; г) $W(p)=\dfrac{5p+12}{(p+1)^2(p-2)}$.

Розв'язання

а) характеристичний поліном системи $D(p) = p^3 - 2p^2 + 3p + 1$ має коефіцієнти різних знаків, тому необхідна умова стійкості не виконується. Отже, система не є стійкою;

б) характеристичний поліном системи $D(p) = p^2 + 3p + 17$ має коефіцієнти одного знака, тому необхідна умова стійкості виконується. Оскільки порядок системи $n = 2$, то ця умова є достатньою, отже, система стійка;

в) характеристичний поліном системи $D(p) = p^3 + 4p^2 + 3p + 2$ має коефіцієнти одного знака, тому необхідна умова стійкості виконується. Однак, порядок системи $n = 3 > 2$, і необхідна умова не є достатньою – система може бути як стійка, так і нестійка;

г) характеристичний поліном цієї системи має вигляд: $D(p) = (p+1)^2(p-2) = p^3 - 3p + 2$; його коефіцієнти різних знаків, тому необхідна умова стійкості не виконується. Отже, система не є стійкою.

Частотний критерій стійкості Михайлова

Нехай характеристичний поліном системи $D(p)$ має загальний вигляд:

$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, $a_n > 0$.

Означення. *Годографом Михайлова* називається крива в комплексній площині, яку описує кінець вектора $D(i\omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$.

Критерій Михайлова. Для того, щоб система була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова починався при $\omega = 0$ на дійсній додатній півосі, при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ не проходив через початок координат і обходив проти годинникової стрілки послідовно n квадрантів комплексній площини, де n – порядок характеристичного рівняння.

На рис. 10.1, 10.2 наведено приклади годографів Михайлова для стійких та для нестійких систем.

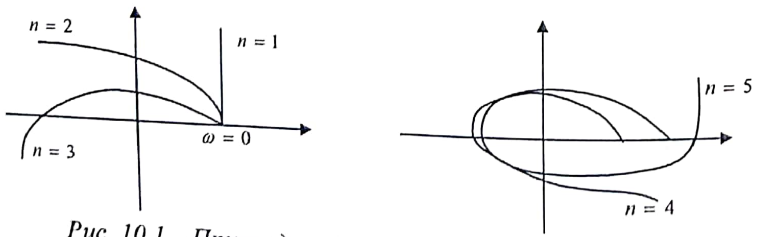


Рис. 10.1 – Приклади годографів Михайлова стійких систем

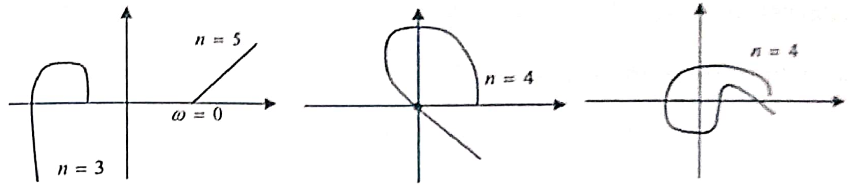


Рис. 10.2 – Приклади годографів Михайлова нестійких систем

Приклад 10.8. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Михайлова систему з передавальною функцією $W(p) = \dfrac{1}{p^2 + 2p + 5}$.

Розв'язання. Побудуємо годограф Михайлова заданої системи. Характеристичний поліном: $D(p) = p^2 + 2p + 5$; порядок системи $n = 2$.

$D(i\omega) = (i\omega)^2 + 2i\omega + 5 = 5 - \omega^2 + 2i\omega$;

$U(\omega) = \mathrm{Re}\, D(i\omega) = 5 - \omega^2$; $V(\omega) = \mathrm{Im} D(i\omega) = 2\omega$.

Будуємо годограф Михайлова по точках. Відповідні значення представлені в таблиці.

ω	0	1	2	3	4	10	...
$U(\omega)$	5	4	1	–4	–11	–95	...
$V(\omega)$	0	2	4	6	8	20	...

Зазначимо, що зв'язок між функціями $U(\omega)$ і $V(\omega)$ квадратичний, тому годограф Михайлова представляє собою частину параболи, що проходить через точки с розрахованими координатами. Шукану криву наведено на рис. 10.3.

Як випливає з аналізу рис. 10.3, всі умови критерію Михайлова виконуються: годограф Михайлова починається при $\omega = 0$ на дійсній додатній півосі, при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ не проходить через початок координат і обходить проти годинникової стрілки послідовно 2 квадранти комплексної площини. Отже, система асимтотично стійка.

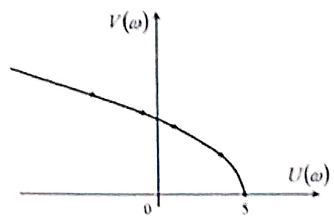


Рис. 10.3 – Годограф Михайлова для прикладу 10.8

Приклад 10.9. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Михайлова системи з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{2p+3}{3p^2+2p+2}$.

Розв'язання. Побудуємо годограф Михайлова цієї системи. Характеристичний поліном: $D(p)=3p^2+2p+2$; порядок системи $n=2$.

$$D(i\omega)=3(i\omega)^2+2i\omega+2=2-3\omega^2+2i\omega;$$

$$U(\omega)=\operatorname{Re}D(i\omega)=2-3\omega^2;\ V(\omega)=\operatorname{Im}D(i\omega)=2\omega.$$

Годограф Михайлова цієї системи є частиною параболи і наведений на рис. 10.4. Як випливає з аналізу рис. 10.4, всі умови критерію Михайлова виконуються. Отже, система асимтотично стійка.

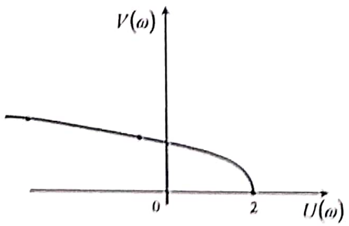


Рис. 10.4 – Годограф Михайлова для прикладу 10.9

Приклад 10.10. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Михайлова системи з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{2p+3}{p^2+2p-2}$.

Розв'язання. Побудуємо годограф Михайлова цієї системи. Характеристичний поліном: $D(p)=p^2+2p-2$; порядок системи $n=2$.

$$D(i\omega)=(i\omega)^2+2i\omega-2=-2-\omega^2+2i\omega;$$

$$U(\omega)=\operatorname{Re}D(i\omega)=-2-\omega^2;\ V(\omega)=\operatorname{Im}D(i\omega)=2\omega.$$

Годограф Михайлова цієї системи є частиною параболи і наведений на рис. 10.5. Як випливає з аналізу рис. 10.5, не всі умови критерію Михайлова виконуються: крива починається на від'ємній частині дійсної осі, оскільки $U(0)=-2$, $V(0)=0$, і обходить тільки I квадрант. Отже, система не є асимптотично стійкою.

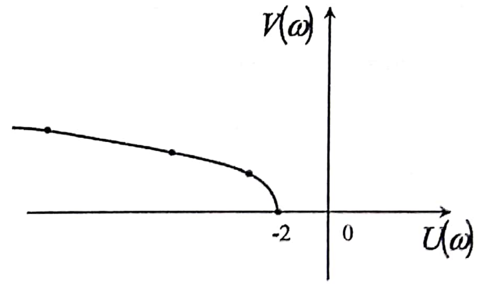


Рис. 10.5 – Годограф Михайлова для прикладу 10.10

Приклад 10.11. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Михайлова системи з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{5p+12}{(p+1)^2(p-2)}$.

Розв'язання. Побудуємо годограф Михайлова заданої системи. Характеристичний поліном: $D(p)=(p+1)^2(p-2)=p^3-3p-2$; порядок системи $n=3$.

$$D(i\omega)=(i\omega)^3-3i\omega-2=-2-i\omega^3-3i\omega;$$

$$U(\omega)=\operatorname{Re}D(i\omega)=-2;$$

$$V(\omega)=\operatorname{Im}D(i\omega)=-\omega^3-3\omega.$$

Годограф Михайлова заданої системи є частиною прямої і наведений на рис. 10.6. Як випливає з аналізу рис. 10.6, не всі умови критерію Михайлова виконуються: крива починається на від'ємній частині дійсної осі, оскільки $U(0)=-2$, $V(0)=0$, і обходить тільки I квадрант. Отже, система не є асимптотично стійкою.

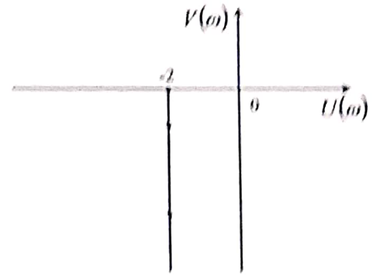


Рис. 10.6 – Годограф Михайлова для прикладу 10.11

Приклад 10.12. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Михайлова систему з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{5p+12}{(p+1)^2(p+2)}$.

Розв'язання. Побудуємо годограф Михайлова заданої системи. Характеристичний поліном: $D(p)=(p+1)^2(p+2)=p^3+4p^2+5p+2$; порядок системи $n=3$.

$D(i\omega)=(i\omega)^3+4(i\omega)^2+5i\omega+2=2-4\omega^2+5i\omega-i\omega^3$;

$U(\omega)=\operatorname{Re}D(i\omega)=2-4\omega^2$;

$V(\omega)=\operatorname{Im}D(i\omega)=5\omega-\omega^3$.

Будуємо годограф Михайлова по точках, координати яких розраховано в таблиці. Шукану криву наведено на рис. 10.7.

ω	0	1	2	3	4	10	...
$U(\omega)$	2	–2	–14	–34	–62	–398	...
$V(\omega)$	0	4	2	–12	–44	–500	...

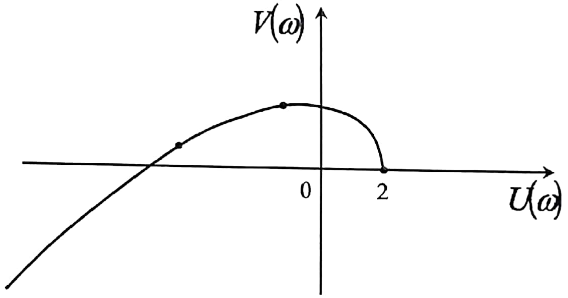


Рис. 10.7 – Годограф Михайлова для прикладу 10.12

Як випливає з аналізу рис. 10.7, всі умови критерію Михайлова виконуються. Отже, система асимтотично стійка.

Критерій переміжності коренів

Нехай характеристичний поліном системи $D(p)$ має загальний вигляд

$D(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1p+a_0$, $a_n>0$.

Позначимо $\operatorname{Re}D(i\omega)=U(\omega)$, $\operatorname{Im}D(i\omega)=V(\omega)$.

Критерій переміжності коренів. Система є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли $U(0)>0, V(0)=0$ і рівняння $U(\omega)=0$, $V(\omega)=0$ мають всі дійсні корені, що перемежовуються (чергуються).

Приклад 10.13. Дослідити на стійкість за допомогою критерію переміжності коренів систему з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+5}$.

Розв'язання. Характеристичний поліном: $D(p)=p^2+2p+5$; тоді $D(i\omega)=5-\omega^2+2i\omega$; $U(\omega)=5-\omega^2$; $V(\omega)=2\omega$.

Перевіримо умови критерію переміжності коренів: $U(0)=5>0$, $V(0)=0$; корені $U(\omega)$: $\omega_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, корені $V(\omega)$: $\omega_3=\pm\sqrt{5}$. На рис. 10.8 наведено графіки функцій $U(\omega)$ і $V(\omega)$; оскільки $U(\omega)$ завжди парна функція, а $V(\omega)$ – непарна, то при побудові графіка достатньо обмежитись невід'ємною частиною осі частот. Аналіз графіків підтверджує переміжність коренів $U(\omega)$ і $V(\omega)$.

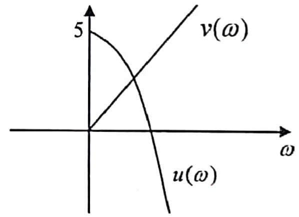


Рис. 10.8 – Графіки функцій $U(\omega)$ і $V(\omega)$ для прикладу 10.13

Усі умови критерію виконані. Отже, система асимтотично стійка.

Приклад 10.14. Дослідити на стійкість за допомогою критерію переміжності коренів систему з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{1}{p^5+5p^2+4p+1}$.

Розв'язання. $D(i\omega)=(i\omega)^5+5(i\omega)^2+4(i\omega)+1=-5\omega^2+(\omega^5+4\omega)i+1$, тоді $U(\omega)=-5\omega^2+1$, $V(\omega)=\omega(\omega^4+4)$.

Перевіримо умови критерію переміжності коренів: $U(0)=1>0, V(0)=0$. Многочлен $V(\omega)$ має комплексні корені, отже, не всі умови критерію виконані; система не є асимптотично стійкою.

Приклад 10.15. Дослідити на стійкість за допомогою критерію переміжності коренів систему з передавальною функцією $W(p)=\dfrac{2p-7}{p^4+3p^3+5p^2+7p+3}$.

Розв'язання

$D(i\omega)=(i\omega)^4+3(i\omega)^3+5(i\omega)^2+7i\omega+3=\omega^4-3i\omega^3-5\omega^2+7i\omega+3$, тоді $U(\omega)=\omega^4-5\omega^2+3$, $V(\omega)=-3\omega^3+7\omega$.

Перевіримо умови критерію переміжності коренів: $U(0)=3>0, V(0)=0$.

$\omega^4-5\omega^2+3=0;$

$t=\omega^2$

$t^2-5t+3=0;$

$D=25-12=13.$

$t_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, t_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2},$

$\omega_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}}; \omega_{3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}}.$

$\omega_{1,2}\approx\pm2{,}074,\ \omega_{3,4}\approx\pm0{,}835.$

$-3\omega^3+7\omega=0;$

$(3\omega^2-7)\omega=0;$

$\omega=0,\ \omega=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}\approx\pm1{,}528$

На рис. 10.9 наведено графіки функцій $U(\omega)$ і $V(\omega)$. Аналіз графіків підтверджує переміжність коренів $U(\omega)$ і $V(\omega)$.

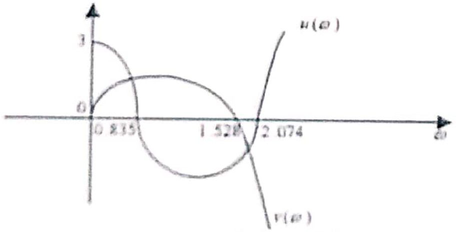


Рис. 10.9 – Графіки функцій $U(\omega)$ і $V(\omega)$ для прикладу 10.15

Усі умови критерію виконано. Отже, система асимтотично стійка.

Критерій стійкості Рауса

Нехай характеристичний поліном системи $D(p)$ має загальний вигляд $D(p)=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1p+a_0$, $a_n>0$.

Для застосування критерію Рауса необхідно побудувати таблицю Рауса, яка має $n+1$ рядків та $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ стовпців.

Загальний вигляд таблиці Рауса

i, k	r_i	1	2	3	...
1	–	$c_{11}=a_n$	$c_{21}=a_{n-2}$	$c_{31}=a_{n-4}$	...
2	–	$c_{12}=a_{n-1}$	$c_{22}=a_{n-3}$	$c_{32}=a_{n-5}$	...
3	$r_3=\frac{c_{11}}{c_{12}}$	$c_{13}=c_{21}-r_3c_{22}$	$c_{23}=c_{31}-r_3c_{32}$	$c_{33}=c_{41}-r_3c_{42}$	...
4	$r_4=\frac{c_{12}}{c_{13}}$	$c_{14}=c_{22}-r_4c_{23}$	$c_{24}=c_{32}-r_4c_{33}$	$c_{34}=c_{42}-r_4c_{43}$	...
	...	...	...	...	...

Для елементів таблиці Рауса правильними є співвідношення: $r_i=\dfrac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$, $i=\overline{3,n-1}$; $c_{k,i}=c_{k+1,i-2}-r_ic_{k+1,i-1}$, $i=\overline{3,n-1}$, $k=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Всі невизначені елементи заповнюються нулями.

Критерій Рауса. Система є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти першого стовпця в таблиці Рауса $c_{11}, c_{12}, ..., c_{1,n+1}$ додатні.

Приклад 10.16. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Рауса систему з характеристичним поліномом $D(p)=p^2+2p+5$.

Розв'язання. Складемо таблицю Рауса; для заданої системи вона вміщує 3 рядки і 2 стовпці.

i, k	r_i	1	2
1	–	1	5
2	–	2	0
3	$r_3=\frac{1}{2}$	$c_{13}=5-\frac{1}{2}\cdot0=5$	$c_{23}=0$

Елементи першого стовпця $c_{11}=1, c_{12}=2, c_{13}=5$ додатні, отже, система асимтотично стійка.

Приклад 10.17. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Рауса систему з характеристичним поліномом $D(p) = p^5 + 5p^2 + 4p + 1$.

Розв'язання. Складемо таблицю Рауса; для заданої системи вона вміщує 6 рядків і 3 стовпці.

i, k	r_i	1	2	3
1	–	1	0	1
2	–	0	4	0
3	$r_3 = \frac{1}{0}$	c_{13}	c_{23}	c_{33}
4	r_4	c_{14}	c_{24}	c_{34}
5	r_5	c_{15}	c_{25}	c_{35}
6	r_6	c_{16}	c_{26}	c_{36}

Елемент r_3 обчислити неможливо, подальше заповнення таблиці проблематичне. Однак, в першому стовпці таблиці знайдено недодатній елемент: $c_{12} = 0$, отже, система не є асимптотично стійкою.

Приклад 10.18. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Рауса систему є характеристичним поліномом $D(p) = p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 7p + 3$.

Розв'язання. Складемо таблицю Рауса; для заданої системи вона вміщує 5 рядків і 3 стовпці.

i, k	r_i	1	2	3
1	–	1	5	3
2	–	3	7	0
3	$r_3 = \frac{1}{3}$	$c_{13} = 5 - \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{8}{3}$	$c_{23} = 3 - 0 = 3$	0
4	$r_4 = \frac{3}{8/3} = \frac{9}{8}$	$c_{14} = 7 - \frac{9}{8} \cdot 3 = \frac{29}{8}$	$c_{24} = 0 - 0 = 0$	0
5	$r_5 = \frac{8/3}{29/8} = \frac{64}{87}$	$c_{15} = 3 - 0 = 3$	0	0

Усі елементи першого стовпця додатні, отже, система асимтотично стійка.

Критерій стійкості Гурвиця

Нехай характеристичний поліном системи $D(p)$ має загальний вигляд

$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, $a_n > 0$.

Критерій Гурвиця. Система є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори визначника Гурвиця $\Delta_1, \ldots \Delta_n$ додатні.

Визначник Гурвиця Δ_n визначається у такий спосіб: його порядок дорівнює порядку характеристичного поліному, по головній діагоналі записуються коефіцієнти характеристичного полінома: $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_0$. Далі визначник заповнюється по рядках коефіцієнтами характеристичного полінома: праворуч від головної діагоналі зі зростанням індексів, ліворуч – зі спаданням індексів.

Приклад 10.19. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Гурвиця систему із характеристичним поліномом $D(p) = p^2 + 2p + 5$.

Розв'язання. Визначник Гурвиця заданої системи: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; його головні

мінори: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 > 0$, $\Delta_1 = 2 > 0$.

Усі головні мінори додатні. Отже, система асимтотично стійка.

Приклад 10.20. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Гурвиця систему із характеристичним поліномом $D(p) = p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 7p + 3$.

Розв'язання. Визначник Гурвиця заданої системи:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо всі його головні мінори.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\left(3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\right) = 3(3 \cdot 26 - 49) = 87 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 29 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 8 > 0;$$

$$\Delta_1 = 3 > 0.$$

Усі головні мінори додатні. Отже, система асимтотично стійка.

Приклад 10.21. Дослідити на стійкість за допомогою критерію Гурвиця систему з характеристичним поліномом $D(p) = p^3 + 2p^2 + 6p - 24$.

Розв'язання. Визначник Гурвиця заданої системи:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -24 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо всі його головні мінори.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -24 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = -24 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -24 & 6 \end{vmatrix} = -24(12+24) = -864 < 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -24 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 24 = 36 > 0;$$

$$\Delta_1 = 2 > 0.$$

Не всі головні мінори додатні. Отже, система не є асимптотично стійкою.

Задачі для самостійного розв'язання до теми 10

Задача 10.1. Дослідити системи а)–д) на асимптотичну стійкість із застосуванням кожного з вивчених критеріїв стійкості (у задачах д)–ж) величина a – параметр):

а) $W(p) = \dfrac{2p^2 + 5p}{p^2 + 4p + 4}$; б) $W(p) = \dfrac{3p + 8}{4p^2 + 3p + 10}$;

в) $W(p) = \dfrac{3p + 7}{2p^2 + 4p + 2}$; г) $W(p) = \dfrac{2p^2 + 5}{p^3 + 11p}$;

д) $W(p) = \dfrac{p + 6}{3p^2 + ap + 4}$; е) $W(p) = \dfrac{2p + 11}{ap^2 + 5p + 4}$;

ж) $W(p) = \dfrac{3p + 8}{4p^2 + ap + 10}$.

Контрольні запитання до теми 10

Основний рівень

1. Дайте визначення асимптотично стійкої системи.
2. Що називають вільним рухом системи?
3. Сформулюйте ознаку асимптотичної стійкості системи.
4. Сформулюйте необхідну умову асимптотичної стійкості. Для яких систем вона є достатньою для стійкості?

Поглиблений рівень

1. Сформулюйте критерій асимптотичної стійкості Михайлова. Що називають годографом Михайлова?
2. Сформулюйте критерій переміжності коренів. Наведіть приклади розташування коренів, що перемежовуються.
3. Сформулюйте критерії асимптотичної стійкості Рауса і Гурвиця. У чому їхня перевага перед іншими способами перевірки стійкості системи?

Список рекомендованої літератури

1. Задачи по теории автоматического управления / под ред. А. С. Шаталова. Москва: Энергия, 1971.

2. Сборник задач по теории автоматического управления / под ред. В. А. Бесекерского. Москва: Наука, 1973.

3. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы: учеб. пособ. для вузов. Санкт-Петербург: Питер, 2005.

4. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. Санкт-Петербург: Профессия, 2004.

5. Артамонов Д. В., Семёнов А. Д. Основы теории линейных систем автоматического управления: учеб. пособ. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003.

6. Повзнер Л. Д. Теория систем управления: учеб. пособ. для вузов. Москва: Изд-во. МГГУ, 2002.

7. Лазарева Т. Я., Мартемьянов Ю. Ф. Линейные системы автоматического регулирования: учеб. пособ. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001.

8. Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. Киев: Вища школа, 1989. 431 с.

9. Михайлов В. С. Теория управления. Киев: Вища школа, 1988. 312 с.

10. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва: Физматгиз, 1961. 524 с.

11. Шостак Р. Я. Операционное исчисление. Москва: Высшая школа, 1972. 280 с.

12. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. Москва: Высшая школа, 1965. 466 с.

13. Шелковников Ф. А., Такайшвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. Москва: Высшая школа, 1968. 256 с.

Додаток А

Таблиця оригіналів і їхніх зображень

№	Оригінал	Зображення
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
3	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
4	$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}$	$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$	$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
11	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
12	$\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{p^2(p+\alpha)}$
13	$\left[(a_0-\alpha)t+1\right]e^{-\alpha t}$	$\frac{p+a_0}{(p+\alpha)^2}$
14	$\frac{1-(1+\alpha t)^{-\alpha t}}{\alpha^2}$	$\frac{1}{p(p+\alpha)^2}$
15	$\frac{a_0}{\alpha^2}+\left(\frac{\alpha-a_0}{\alpha}t-\frac{a_0}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}$	$\frac{p+a_0}{p(p+\alpha)^2}$
16	$\frac{1}{\omega^2}t-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)p^2}$

Продовження Додатока А

Таблиця оригіналів і їхніх зображень (продовження)

№	Оригінал	Зображення
17	$\frac{1}{\omega^2}\operatorname{sh}\omega t-\frac{1}{\omega^2}t$	$\frac{1}{\left(p^2-\omega^2\right)p^2}$
18	$\frac{1}{2\omega}t\sin\omega t$	$\frac{p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
19	$\frac{1}{2\omega}\left(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t\right)$	$\frac{p^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
20	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
21	$t^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{\left(p+\alpha\right)^2-\omega^2}{\left[\left(p+\alpha\right)^2+\omega^2\right]^2}$
22	$\frac{\sin\omega t}{t}$	$\operatorname{arctg}\frac{\omega}{p}$
23	$J_n(t)\ \ (n>-1)$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24	$\frac{J_1(t)}{t}$	$\frac{1}{p+\sqrt{p^2+1}}$
25	$\mathbf{1}(t-a)$	$\frac{1}{p}e^{-a\,p}$
26	$(t-a)\mathbf{1}(t-a)$	$\frac{1}{p^2}e^{-a\,p}$
27	$\mathbf{1}(t-a)-\mathbf{1}(t-b)$	$\frac{1}{p}\left(e^{-a\,p}-e^{-b\,p}\right)$ при $a<b$

Навчальне видання

Вайсруб Наталя Володимирівна
Смоктій Кирило Вікторович
Смоктій Оксана Данилівна
Врублевський Віктор Андрійович

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ЩОДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ
ЗАВДАНЬ З КУРСУ «ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ»**

Редактор *А. О. Цяпало*

Технічний редактор *Т. О. Алимова*

Підписано до друку 27.12.2019 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 4,4
Тираж 200 прим. Зам. № 129

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018 р.