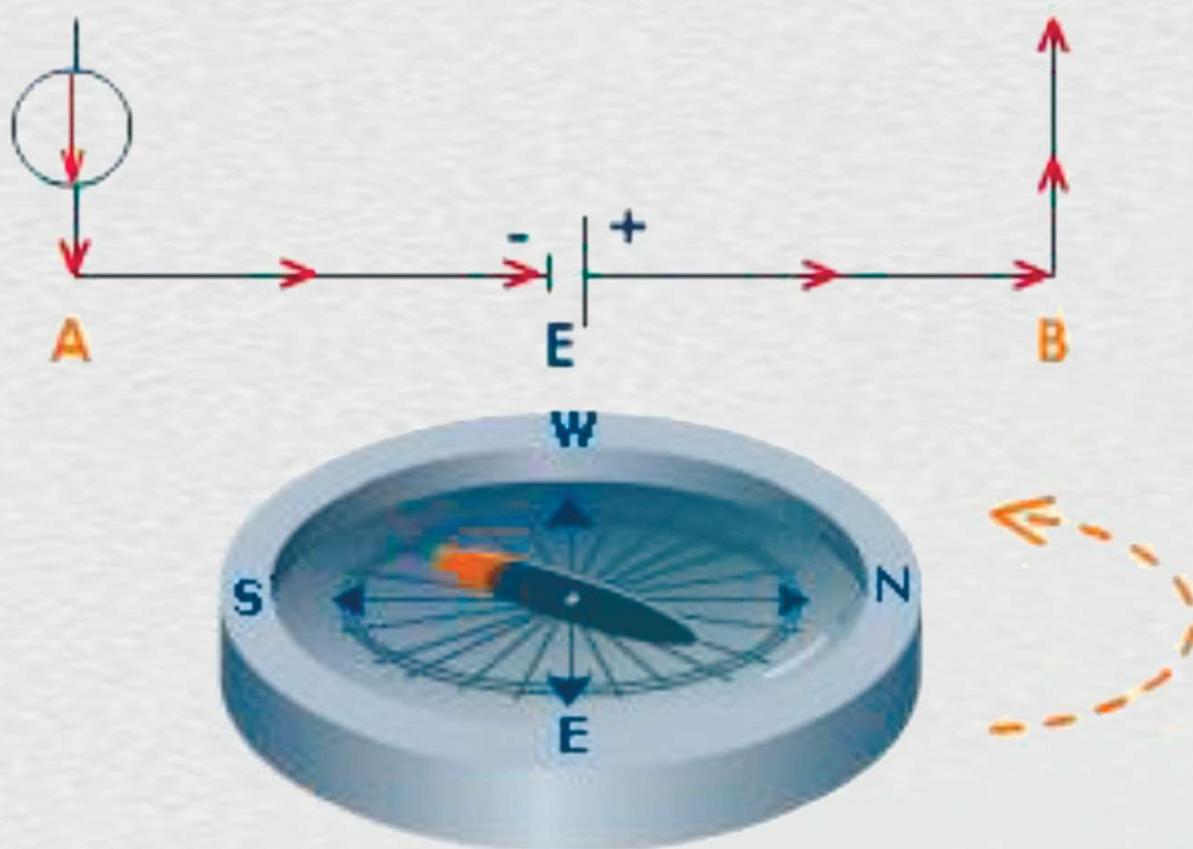


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВАСЫЛЯ СТУСА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. РУСАКОВ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



Винница 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ВАСЫЛЯ СТУСА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. РУСАКОВ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие

Винница
ДонНУ имени Василя Стуса
2017

ББК В36я 73–1
УДК 378.147:34
Р 882

Автор: *В. Ф. Русаков*, д-р физ.-мат. наук, проф.

Рецензенты: *Э. Е. Зубов*, д-р физ.-мат. наук, с. н. с., главный научный сотрудник Института металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины;
А. Н. Шендрик, д-р хим. наук, проф., декан химического факультета ДонНУ имени Василя Стуса.

*Печатается по решению Ученого совета
Донецкого национального университета имени Василя Стуса
(протокол № 2 от 27.01.2017 г.)*

Русаков В. Ф.

Р 882 **Электричество и магнетизм: учебное пособие /**
В. Ф. Русаков. – Винница: ДонНУ имени Василя Стуса, 2017. –
236 с.

В пособии изложен материал по электромагнетизму в объеме программы по общей физике.

Для студентов специальностей: «Физика и астрономия», «Компьютерные науки и информационные технологии», «Кибербезопасность», «Метрология и информационно-измерительные технологии», «Прикладная физика», «Среднее образование, преподавание физики и информатики». Может использоваться студентами и других специальностей при изучении соответствующих разделов курса общей физики.

ББК В36я 73–1
УДК 378.147:34

© Русаков В. Ф., 2017

© ДонНУ имени Василя Стуса, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В пособии представлен материал по электромагнетизму и электромагнитным волнам, который в течение ряда лет читался студентам физико-технического факультета. Все явления изложены на основе теории близкодействия, электрические и магнитные поля рассматриваются как проявления единой материальной субстанции – электромагнитного поля. Электропроводность металлов рассмотрена на основе классической теории электропроводности Друде–Лоренца. При изложении материала приводится описание экспериментальных результатов с их последующим теоретическим обобщением и представлением в виде основных законов электромагнетизма – уравнений Максвелла. Основные законы приведены как в интегральной, так и в дифференциальной формах. Такой подход позволяет проводить более детальное изучение явлений электромагнетизма. Рассмотрены электрические и магнитные свойства вещества.

Значительное внимание уделяется рассмотрению электрических колебаний, электромагнитных волн и их свойств.

Наряду с теоретическим материалом пособие содержит большое количество задач как с подробным изложением методики их решения, так и для самостоятельного решения. Предполагается, что приведение методики решения задач значительно упростит усвоение теоретического материала.

I. Электрическое поле в вакууме

§ 1. Элементарный заряд. Два рода электричества

В природе существует четыре типа взаимодействий.

1. Гравитационное – управляет взаимодействием тел, обладающих массами, существенно проявляется только при больших массах тел, на астрономических расстояниях, имеет дальнедействующий характер, т. е. обращается в нуль только при бесконечном расстоянии между взаимодействующими телами, обладающими массой.

2. Сильное – управляет взаимодействием нуклонов в ядре атома, проявляется на расстояниях порядка размеров ядра – 10^{-15} м. Это так называемое короткодействующее взаимодействие.

3. Слабое – управляет взаимными превращениями элементарных частиц и проявляется на расстояниях порядка размеров частиц, т. е. тоже является короткодействующим.

4. Электромагнитное – управляет взаимодействием заряженных тел, как и гравитационное взаимодействие носит дальнедействующий характер.

Из указанных взаимодействий только электромагнитное взаимодействие существенно проявляется на тех пространственных масштабах, которые определяют жизнь человеческого общества. Электромагнитное взаимодействие определяет все силы, с которыми мы сталкивались в механике (упругости, трения, вязкости и др.), кроме силы тяготения, которая имеет гравитационную природу. Электромагнитную природу имеет взаимодействие между ядрами и электронами в атомах, между атомами в молекулах, между молекулами и т. д. Электромагнитные явления лежат в основе работы всех электрорадиотехнических и электронных устройств и приборов, без которых жизнь современного человеческого общества представить невозможно. Сила электромагнитного взаимодействия между двумя электронами в 10^{40} раз превосходит силу их гравитационного взаимодействия.

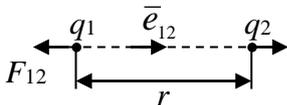
Проявление электромагнитного взаимодействия связано с понятием заряда. Понятие заряда является первичным в электродинамике. Существует наименьший заряд, который называется элементарным. Элементарный заряд численно равен заряду электрона (протона) $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Заряд квантуется, т. е. заряд любого тела q кратен элементарному заряду e : $q = \pm Ne$, где N – целое число. В природе существует, как говорят, два вида электричества или два вида зарядов, которые условились называть положительными и отрицательными. Заряд является инвариантной величиной,

при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую он не изменяется, т. е. величина заряда тела не зависит от скорости его движения. Выполняется закон сохранения заряда: в замкнутой системе зарядов заряд сохраняется при любых взаимодействиях и движениях заряженных тел, составляющих систему. Раздел физики, изучающий взаимодействие и движение заряженных тел и связанные с ними процессы, называется электродинамикой.

§ 2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона

Заряды взаимодействуют между собой. Раздел электродинамики, изучающий взаимодействие неподвижных зарядов, называется электростатикой. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются. Закон взаимодействия зарядов был установлен экспериментально Кулоном в 1785 г. и носит его имя. Для установления закона взаимодействия использовались точечные заряды и крутильные весы.

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Направление силы совпадает с соединяющей заряды прямой.



$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_{12},$$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_{12},$$

здесь \vec{e}_{12} – единичный вектор, указывающий направление силы Кулона,
 k – коэффициент пропорциональности, модуль силы:

$$F = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}.$$

Направление силы вдоль прямой, соединяющей заряды, вытекает из свойств симметрии (однородности и изотропности) пространства.

Далее в тексте принято считать, что первый индекс у силы указывает, на какое тело действует сила, второй – со стороны какого тела действует сила. Например, \vec{F}_{ij} – сила, действующая со стороны j -го тела на i -ое тело.

Опыт показывает, что сила взаимодействия двух данных зарядов не изменяется, если вблизи них поместить еще какие-либо заряды. Пусть имеется система N зарядов q_1, q_2, \dots, q_N , поместим в нее (или вблизи нее) заряд q_a . Из сказанного выше следует, что результирующая сила \vec{F} , с которой действуют на заряд q_a N зарядов q_i , определяется формулой:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ai},$$

где \vec{F}_{ai} – сила, с которой действует на заряд q_a заряд q_i в отсутствие остальных $N - 1$ зарядов.

Т. е. сила, действующая на выделенный заряд со стороны системы зарядов, равна равнодействующей сил попарного взаимодействия данного заряда с каждым из зарядов системы.

В системе СИ единица заряда – кулон, производная единица.

1 кулон равен заряду, протекающему за 1 секунду через поперечное сечение проводника при силе тока в нем 1 ампер. (Определение ампера будет дано ниже).

Наряду с системой СИ в электродинамике используется абсолютная электростатическая система единиц – СГСЭ-система. 1 кулон = $2,998 \cdot 10^9$ СГСЭ единиц заряда.

1 СГСЭ абсолютная электростатическая единица заряда равна заряду, который взаимодействует с равным ему в вакууме на расстоянии 1 см с силой в 1 дину (1 дин = 10^{-5} Н).

Насколько велик заряд в 1 кулон? Чтобы ответить на этот вопрос найдем силу взаимодействия между неподвижными зарядами в 1 кулон, расположенными на расстоянии 1 м в вакууме:

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{(100)^2} \text{ СГСЭ} = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}.$$

Это очень большая величина. Она равна силе, с которой давил бы на опору груз массой в миллион тонн!!! Реальные заряды тел обычно бывают значительно меньше.

Во многие формулы электродинамики, если их записывать в СГСЭ-системе, входят множителями 4π и электродинамическая постоянная c , равная скорости света в вакууме. Чтобы избавиться от них в наиболее важных формулах, коэффициент пропорциональности в законе Кулона в системе СИ полагают равным $1/4\pi\epsilon_0$. Тогда закон Кулона в системе СИ запишется в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}.$$

Измененная подобным образом запись формулы закона Кулона называется рационализированной. ϵ_0 – электрическая постоянная. Ее величину легко определить. Пусть $q_1 = q_2 = 1$ Кл, $r = 1$ м, тогда:

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

откуда:

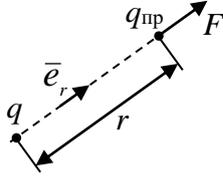
$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-11} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Единица измерения $\Phi/\text{м}$ (фарад, деленный на метр) будет обсуждаться дальше в тексте.

В простейшей форме закон Кулона справедлив для точечных зарядов или равномерно заряженных шаров. При определении силы взаимодействия между телами произвольной формы их необходимо разбить на элементарные заряды, найти силу взаимодействия между этими элементарными зарядами (считая их точечными) и затем проинтегрировать по объемам взаимодействующих тел.

§ 3. Электрическое поле. Напряженность поля

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле, понятие о котором было введено Фарадеем. В соответствии с идеей Фарадея, всякий заряд создает в окружающем его пространстве электрическое поле. Оно проявляет себя в том, что на всякий заряд, помещенный в него, действует сила. По величине силы, действующей на данный заряд, можно судить об интенсивности поля.



Для обнаружения и исследования электрического поля нужно воспользоваться неким пробным зарядом. Для того чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле в данной точке, пробный заряд должен быть точечным, а величина его достаточно малой, чтобы не исказить исследуемое поле.

Исследуем с помощью $q_{пр}$ поле точечного заряда q . Поместим $q_{пр}$ в точке поля r , тогда сила, на него действующая, будет равна:

$$\vec{F} = q_{пр} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right),$$

где \vec{e}_r – орт радиус-вектора \vec{r} .

Откуда следует, что сила, действующая на пробный заряд, зависит не только от величин, определяющих поле, но и от величины пробного заряда. Очевидно, что отношение $F/q_{пр}$ для всех пробных зарядов будет одно и то же и зависит только от q и \vec{r} , определяющих поле в данной точке. Это отношение принимается в качестве величины, характеризующей электрическое поле.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

напряженность электрического поля в данной точке.

Напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный заряд, находящийся в данной точке поля. Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением силы, действующей на

положительный заряд. Формула остается справедливой и в случае $q_{пр} < 0$, но тогда векторы \vec{E} и \vec{F} имеют противоположное направление.

Направлен вектор напряженности электрического поля \vec{E} вдоль прямой, проходящей через заряд и данную точку поля от заряда, если он положителен и к заряду, если он отрицателен.



К понятию напряженности мы пришли, исследуя поле неподвижного точечного заряда. Это определение распространяется и на случай поля, создаваемого любой совокупностью неподвижных зарядов. Однако следует помнить, что под влиянием пробного заряда может измениться расположение зарядов, поэтому величину пробного заряда нужно брать достаточно малой.

Напряженность поля точечного заряда есть

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r.$$

За единицу напряженности принимается напряженность в такой точке поля, где на заряд, равный единице, действует сила, величина которой тоже равна единице. В системе СИ единица напряженности поля 1 В/м (вольт, деленный на метр, см. ниже).

Заряд в 1 Кл на расстоянии 1 м создает поле:

$$E = \frac{1}{4\pi \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \right)} \cdot \frac{1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ В/м.}$$

На всякий точечный заряд q , помещенный в данную точку электрического поля напряженностью E , будет действовать сила

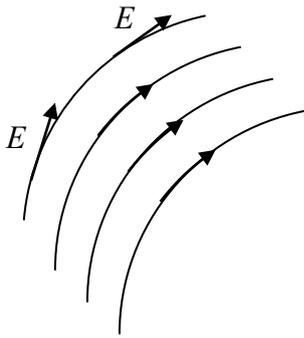
$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Сила, действующая на положительный заряд, параллельна напряженности электрического поля и направлена противоположно напряженности электрического поля в случае отрицательного заряда.

Из правила сложения сил для системы точечных зарядов следует, что напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i .$$

Это утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) электрических полей. Он позволяет вычислить напряженность поля любой системы зарядов. Рассматривая протяженные заряды как совокупность бесконечно малых зарядов dq , любую систему зарядов можно свести к совокупности точечных зарядов. Вклад каждого из таких зарядов вычисляется по формуле для точечного заряда, результирующее поле определяется интегрированием полученного соотношения.



Электрическое поле можно описать, указав для каждой точки величину и направление вектора \vec{E} . Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электрического поля. Как было показано в механике, при изучении движения

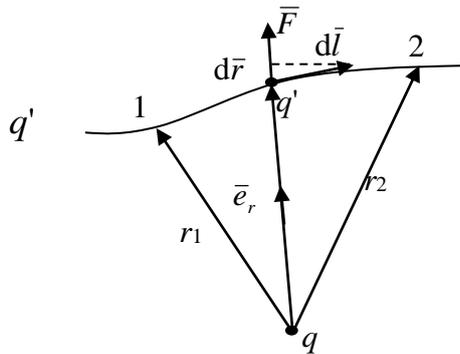
жидкостей поле вектора скорости можно представить очень наглядно с помощью линий тока. Аналогично электрическое поле можно описать с помощью линий напряженности (E -линий) – силовых линий. Эти линии проводятся таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора напряженности E . Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности перпендикулярной к линиям площадки, было равно числовому значению

вектора E . Напряженность поля точечного заряда $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, окружим

заряд сферой радиуса r , ее площадь – $S = 4\pi r^2$. Тогда количество линий, пересекающих поверхность сферы, $q/\epsilon_0 = const$, т. е. остается постоянным, независимо от расстояния до заряда (источника поля). Отсюда следует, что линии напряженности электростатического поля нигде, кроме заряда, не начинаются и не заканчиваются.

Линии напряженности могут начинаться и заканчиваться только на зарядах, либо уходить на бесконечность.

§ 4. Потенциал и работа сил электростатического поля



В любой точке поля неподвижного точечного заряда q на другой точечный заряд действует сила

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{e}_r = F(r) \vec{e}_r.$$

Сила \vec{F} – центральная, а центральное поле, как было показано в курсе механики, консервативно, следовательно, работа сил поля над зарядом q' не зависит от формы траектории, но определяются только начальным и конечным положением заряда, она равна:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F(r) \vec{e}_r d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ – элементарное перемещение заряда.

Интегрирование ведется от начального до конечного положения движущегося заряда. Из рисунка видно, что, $\vec{e}_r d\vec{l} = dr$, т. е.:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F(r) dr.$$

Подставляя выражение для модуля силы $F(r)$, получим:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{(1)}^{(2)} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right).$$

В последнем выражении учтено, что результат интегрирования не зависит от формы траектории движения заряда (сила Кулона консервативна).

Работа сил консервативного поля равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Сравнивая два последних выражения, видим, что:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + const.$$

Значение константы для удобства выбирается так, чтобы при удалении заряда на бесконечность ($r \rightarrow \infty$), его потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}.$$

В соответствии с определением, потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его величины, но и от величин q и r , определяющих поле. Разные заряды q' , q'' , ... будут обладать и разной потенциальной энергией W' , W'' , ..., однако отношение $W/q_{пр}$ будет для всех пробных зарядов одним и тем же. Величина

$$\varphi = \frac{W}{q_{пр}}$$

называется потенциалом поля в данной точке и используется наряду с напряженностью \vec{E} для описания электрических полей.

Потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд. Потенциал точечного заряда имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Найдем потенциал системы N точечных зарядов. Учтем, что работа – величина аддитивная, тогда работа поля системы зарядов по перемещению заряда q' из начального положения в конечное, равна:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N A_i,$$

где:

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right),$$

здесь r_{i1} – расстояние от произвольного заряда системы q_i до начального положения заряда q' , аналогично r_{i2} .

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Потенциальная энергия пробного заряда q' в поле системы зарядов:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_i}$$

и потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности (поскольку сложение скалярное, вычисление потенциала оказывается обычно проще, чем вычисление напряженности электрического поля системы зарядов).

Заряд q , находящийся в точке поля с потенциалом φ , обладает потенциальной энергией:

$$W = q\varphi.$$

Тогда работа электрического поля по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 есть:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению величины заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках поля.

Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где, в соответствии с выбором начала отсчета потенциальной энергии, потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна:

$$A_{\infty} = q\varphi,$$

т. е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность (если наоборот, заряд перемещается из бесконечности в данную точку поля, – работа совершается против сил поля).

За единицу потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице.

В системе единиц СИ единица потенциала 1 В (вольт).

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В},$$

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}.$$

1 вольт – это разность потенциалов, при прохождении которой заряд в 1 кулон приобретает энергию в 1 джоуль.

В электродинамике в качестве единицы энергии используют электрон-вольт. Это энергия, приобретаемая электроном при прохождении разности потенциалов в 1 вольт.

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Энергия взаимодействия двух зарядов:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}.$$

Чтобы найти энергию взаимодействия всех зарядов системы, необходимо просуммировать энергию их попарного взаимодействия, исключая самодействие. Для системы N зарядов, получим:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} W_{ik}(r_{ik}),$$

где:

$$W_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}.$$

Тогда:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_k}{r_{ik}} -$$

потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i , в той точке, где помещается заряд q_i . Для энергии взаимодействия будем иметь:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

§ 5. Связь между напряженностью электрического поля и разностью потенциалов

Электрическое поле можно описать либо с помощью векторной величины \vec{E} – напряженности поля, либо скалярной φ – потенциала поля. Очевидно, между этими величинами должна существовать определенная связь, поскольку они характеризуют один и тот же физический объект. Если учесть, что напряженность поля \vec{E} пропорциональна силе, действующей на заряд, а φ – потенциальной энергии, легко сообразить, что эта связь должна быть аналогична связи между потенциальной энергией и силой, которая была получена в механике:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W.$$

Здесь $\vec{\nabla} W$ – градиент потенциальной энергии.
Учитывая, что

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad W = q\varphi,$$

подставляя в предыдущее соотношение, легко получить:

$$q\bar{E} = -\bar{\nabla}(q\varphi),$$

откуда:

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi,$$

или

$$\bar{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k},$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \dots$$

Покажем, как работают полученные соотношения при расчете напряженности поля точечного заряда, если известен его потенциал.

Потенциал поля точечного заряда, как показано выше, есть:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3},$$

аналогично для производных по y и z , откуда легко получить:

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \bar{e}_r,$$

что совпадает с полученным ранее результатом. Т. е. по известному значению потенциала электрического поля φ можно найти его напряженность \bar{E} .

Можно решить и обратную задачу: по заданному значению напряженности электрического поля \vec{E} найти его потенциал φ . Для этого следует воспользоваться выражением для работы сил поля при перемещении заряда:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q\vec{E}d\vec{l}.$$

С другой стороны:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Откуда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}.$$

Для замкнутого контура:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Это условие справедливо только для электростатического поля!!!

Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

При перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности потенциал не меняется, работа равна нулю, следовательно, касательная к поверхности, составляющая вектора \vec{E} , равна нулю, т. е. в каждой точке вектор \vec{E} направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности.

§ 6. Теорема Гаусса

Рассмотрим поток вектора напряженности электрического поля (или число силовых линий) через произвольную площадку S : $\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}$.

Теорема Остроградского–Гаусса утверждает, что поток любого вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции (операция дивергенция – это действие оператора Гамильтона скалярно на векторную функцию) этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{A} dV.$$

Рассмотрим точечный заряд и окружим его сферой радиуса r_1 , тогда поток вектора напряженности через эту поверхность будет равен:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Заметим, что результат не зависит от r_1 и поэтому справедлив для всех значений r . Таким образом, полное число силовых линий, выходящих из точечного заряда q , равно q/ϵ_0 , и эти линии непрерывны на всем пути до бесконечности. Число силовых линий равно $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$, даже если замкнутая поверхность не является сферой. Поток вектора напряженности через бесконечно малые поверхности dS и dS' одинаков $\vec{E} d\vec{S} = \vec{E} d\vec{S}'$, если dS и dS' пересекает одно и то же число силовых линий. Проинтегрировав по поверхности сферы S и произвольной поверхности S' , получим:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E} d\vec{S}' = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Подчеркнем еще раз, что S' – замкнутая поверхность произвольной формы, охватывающая заряд q . Такая поверхность называется гауссовой поверхностью.

Чтобы вывести теорему Гаусса, предположим, что замкнутая поверхность охватывает два точечных заряда q_1 и q_2 . Тогда, в силу принципа

суперпозиции, результирующее поле будет равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов:

$$\Phi_{\text{полн}} = \oint \bar{E} d\bar{S} = \oint (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) d\bar{S} = \oint \bar{E}_1 d\bar{S} + \oint \bar{E}_2 d\bar{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0},$$

$$\Phi_{\text{полн}} = \frac{1}{\varepsilon_0} (q_1 + q_2),$$

т. е. полное число силовых линий (поток вектора \bar{E}), пересекающих замкнутую поверхность, равно произведению $\frac{1}{\varepsilon_0}$ на величину полного

заряда внутри этой поверхности.

Или: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0 . Это утверждение называется теоремой Гаусса в интегральной форме.

$$\Phi_E = \oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i.$$

Рассмотрим заряд, распределенный по объему V с плотностью ρ , причем плотность заряда может быть функцией координат. В этом случае полный заряд можно представить в виде $\sum_i q_i = \int \rho dV$, тогда для потока вектора напряженности электрического поля, созданного произвольным заряженным телом, можно написать: $\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$.

Учитывая, что $\oint \bar{A} d\bar{S} = \int \text{div} \bar{A} dV$, получим:

$$\int_V \nabla \bar{E} dV = \int_V \text{div} \bar{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Учитывая произвольность выбранного объема, из полученного равенства следует:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho.$$

Это соотношение называется теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

Дивергенция вектора напряженности электрического поля равна плотности электрического заряда, деленной на электрическую постоянную.

§ 7. Равновесие зарядов на проводнике

Носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение следующих условий:

1. Напряженность поля всюду внутри проводника должна быть равна нулю:

$$\bar{E} = 0,$$

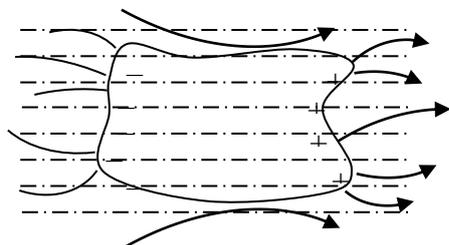
т. е. потенциал внутри проводника всюду должен быть постоянным $\varphi = \text{const}$.

2. Напряженность поля на поверхности всюду должна быть направлена по нормали к поверхности:

$$\bar{E} = \bar{E}_n.$$

Следовательно, в случае равновесия зарядов на проводнике его поверхность будет эквипотенциальной.

§ 8. Проводник во внешнем электрическом поле



При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные – в направлении вектора \vec{E} , отрицательные – в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами.

Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Следовательно, накапливание зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перераспределение зарядов будет происходить до тех пор, пока не будут выполнены условия равновесия, т. е. пока поле внутри проводника не обратится в нуль. Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее равняется нулю. На этом основывается электростатическая защита. Прибор, который необходимо защитить от воздействия внешнего электрического поля, помещают в металлический корпус или каркас из металлической сетки.

Сводка основных формул и задачи к разделу I

По закону Кулона, сила, действующая со стороны заряда q_1 на заряд q_2 , равна:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r^3}. \quad (1.1)$$

Здесь \vec{r}_{12} – радиус-вектор, проведенный от заряда q_1 к заряду q_2 , $r = |\vec{r}_{12}|$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, заряды – величины алгебраические.

Электрическое поле характеризуется вектором напряженности \vec{E} , который численно равен силе, действующей на единичный неподвижный пробный электрический заряд $q_{пр}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}. \quad (1.2)$$

Это соотношение чаще используется для нахождения силы по известной напряженности: $\vec{F} = q_{пр} \vec{E}$.

Напряженность поля точечного заряда q равна:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.3)$$

Вектор \vec{r} проведен от заряда к точке наблюдения, $r = |\vec{r}|$.

Для расчета поля \vec{E} , созданного системой из n зарядов, используется принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.4)$$

где \vec{E}_i – напряженность поля, созданного зарядом под номером i .

Для случая непрерывного распределения заряда по объему V с объемной плотностью ρ принцип суперпозиции предполагает интегрирование:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}}{r^3} \rho dV. \quad (1.5)$$

Здесь \vec{r} – вектор, проведенный от элементарного объема dV к точке наблюдения, $r = |\vec{r}|$. Если заряд распределен по поверхности с поверхностной плотностью σ или по контуру с линейной плотностью λ , тогда поверхностный или криволинейный интегралы рассчитываются соответственно:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \sigma dS, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\vec{r}}{r^3} \lambda dl. \quad (1.5 \text{ а})$$

Теорема Остроградского–Гаусса: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

Для заряда, непрерывно распределенного в объеме V , охваченном поверхностью S , $q = \int_V \rho dV$. Теорема Остроградского–Гаусса удобна при расчете полей, созданных зарядами, распределенными с некоторой симметрией. В дифференциальной форме теорема имеет вид:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.6 \text{ а})$$

Поле неподвижных зарядов потенциально, и циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру L равна нулю:

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0. \quad (1.7)$$

В потенциальном поле потенциал ϕ связан с напряженностью:

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi, \quad (1.8)$$

или в декартовых координатах:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (1.8 \text{ a})$$

Проекция E_l на любое направление в пространстве, задаваемое вектором \vec{l} , равна:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (1.9)$$

В осесимметричных и сферически симметричных задачах, где поле зависит только от одной пространственной координаты r :

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (1.10)$$

Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.11)$$

Для потенциала поля системы зарядов также справедлив принцип суперпозиции:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.12)$$

При непрерывном распределении зарядов в пространстве потенциал определяется интегрированием по объему, где имеется заряд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (1.13)$$

В случае распределения заряда по поверхности с поверхностной плотностью σ или по контуру с линейной плотностью λ вместо объемного рассчитываются поверхностный или криволинейный интегралы соответственно:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (1.13 \text{ а})$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r}. \quad (1.13 \text{ б})$$

В отличие от напряженности \vec{E} , потенциал является скалярной величиной, расчет которой проще. Поэтому на практике часто сначала находят φ , а потом дифференцированием – вектор \vec{E} .

Из (1.8) и (1.6 а) следует основное уравнение электростатики:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.14)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Работа сил электрического поля по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 равна:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.15)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Тонкое полукольцо радиуса $R = 20$ см заряжено равномерно зарядом $q = 0,7$ нКл. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

$R = 0,2$ м
$q = 0,7 \cdot 10^{-9}$ Кл
$E = ?$

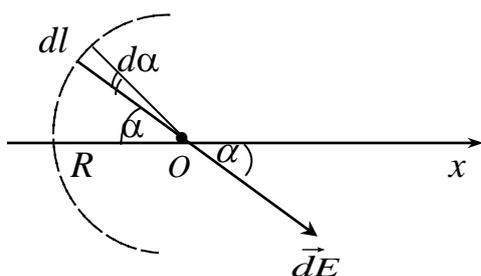
Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

Решение

Выделим на полукольце (рис. 1.1) бесконечно малую дугу, расположенную под углом α , длиной:

$$dl = R d\alpha, \quad (1)$$

где $d\alpha$ – малое приращение угла. Тогда, обозначая λ линейную плотность заряда на полукольце:



$$\lambda = \frac{q}{\pi R}, \quad (2)$$

выразим заряд дуги:

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\alpha. \quad (3)$$

Рис. 1.1

Его можно считать точечным из-за малости дуги. Созданная им напряженность поля в центре полукольца по величине равна (1.3):

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\alpha. \quad (4)$$

Этот вектор образует с осью x угол α . Применим принцип суперпозиции (1.5), складывая все векторы $d\vec{E}$, соответствующие всевозможным значениям α , от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. В силу симметрии и однородности распределения заряда ($\lambda = \text{const}$) результирующий вектор \vec{E} совпадает с осью x , так как перпендикулярные к ней составляющие компенсируются. Задача сводится к суммированию проекций на ось x :

$$dE_x = dE \cdot \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha. \quad (5)$$

Такое суммирование соответствует интегрированию по α , которое можно провести по четверти кольца, удвоив результат:

$$E = E_x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

Подставляя λ из (2), получаем:

$$E = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

Подставляя числовые значения, найдем:

$$E = \frac{0,7 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2^2} \approx 0,1 \text{ (кВ/м)}.$$

Задача 2. Тонкое проволочное кольцо радиуса $R = 100$ мм имеет электрический заряд $q = 50$ мкКл. Каково будет приращение силы, растягивающей проволоку, если в центр кольца поместить точечный заряд $q_0 = 7$ мкКл?

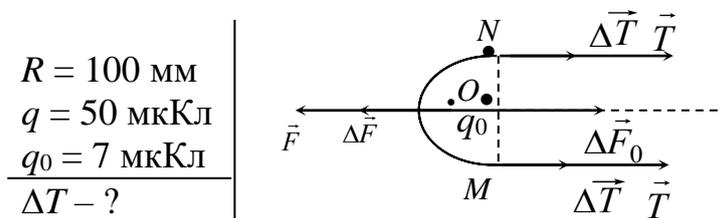


Рис. 1.2

Решение

Заряд распределен по металлическому кольцу равномерно с линейной плотностью:

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R}. \quad (1)$$

Каждый элемент кольца отталкивается всеми другими одноименно с ним заряженными элементами, так что кольцо в целом растягивается. Его удерживают от разрыва силы упругости, возникающие в материале при деформации растяжения. Так, электрические силы, силы отталкивания, стремятся оторвать одну половинку кольца от другой, а силы упругости, возникающие в точках контакта полуколец, препятствуют отрыву.

Например, на левое полукольцо (рис. 1.2) со стороны правого действуют электрическая сила отталкивания F , направленная перпендикулярно диаметру MN , и силы упругости T , приложенные в диаметрально противоположных точках M и N контакта полуколец. Условие равновесия:

$$T - F = 0. \quad (2)$$

Заряд q_0 того же знака, что и заряд полукольца, действует на полукольцо с силой ΔF , которая обуславливает появление добавочных сил упругости ΔT . Теперь условие равновесия примет вид:

$$2(T + \Delta T) - (F + \Delta F) = 0. \quad (3)$$

Вычтя из выражения (3) выражение (2), получим для приращения силы растяжения ΔT :

$$\Delta T = \frac{\Delta F}{2}. \quad (4)$$

По третьему закону Ньютона, сила ΔF численно равна силе ΔF_0 , приложенной со стороны полукольца к заряду q_0 . Ее можно выразить через напряженность E поля, создаваемого полукольцом в его центре O , и заряд q_0 :

$$\Delta F = \Delta F_0 = E q_0. \quad (5)$$

Величина E найдена в задаче 1 (формула (6)). Подставляя в нее значение λ , определяемое выражением (1) данной задачи, получим:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2}. \quad (6)$$

Наконец, по формуле (4), с учетом (5) и (6), запишем:

$$\Delta T = \frac{qq_0}{8\pi^2\epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

Подставляя числовые значения, найдем:

$$\Delta T = \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,1)^2} \approx 50 \text{ (Н)}.$$

Задача 3. Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиуса R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд q . На единицу длины нити приходится заряд λ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.

Решение

На рис. 1.3 изображены кольцо и нить, расположенная на его оси, совпадающей с осью x . Пусть оба они заряжены положительно.

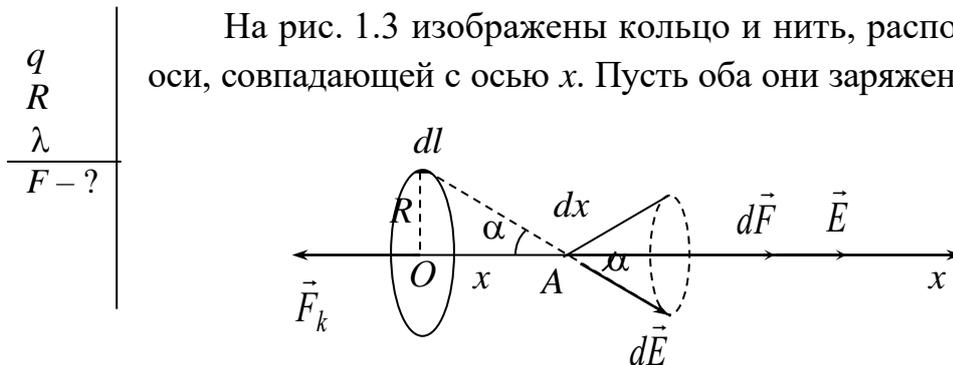


Рис. 1.3

В точке A на расстоянии x от центра кольца заряд dq на бесконечно малой дуге dl кольца создает поле с напряженностью $d\vec{E}$:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2}, \quad (1)$$

где α – угол между $d\vec{E}$ и осью x .

Так как кольцо заряжено равномерно, то каждому элементу dl соответствует такой же, диаметрально противоположный. Множество элементов кольца порождает множество векторов $d\vec{E}$, образующих коническую поверхность. Складываясь по принципу суперпозиции (1.5), они дают результирующий вектор \vec{E} , направленный по оси. Следовательно, складывать необходимо их проекции dE_x , равные:

$$dE_x = dE \cdot \cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos^3\alpha. \quad (2)$$

Поскольку α и x одинаковы для всех элементов кольца, интегрирование даст:

$$E = E_x = \frac{\cos^3\alpha}{2\pi\epsilon_0 x^2} \int_0^q dq = \frac{q \cos^3\alpha}{4\pi\epsilon_0 x^2}. \quad (3)$$

На элемент нити длиной dx , несущий заряд $dq = \lambda dx$, действует сила dF , равная (1.2):

$$dF = E \cdot dq = E\lambda dx = \frac{q\lambda \cos^3\alpha}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx. \quad (4)$$

Для нахождения результирующей силы F , действующей на всю полубесконечную нить, необходимо проинтегрировать по x в пределах от 0 до ∞ . В выражении (4) две переменных величины, выразим x через α и проинтегрируем по α в пределах от $\pi/2$ до 0. В самом деле:

$$x = R \cdot ctg\alpha, \quad (5)$$

$$dx = -\frac{R}{\sin^2\alpha} d\alpha.$$

С учетом этого, из формулы (4) следует:

$$dF = \frac{q\lambda \cos^3 \alpha}{4\pi\epsilon_0 (R \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2} \left(-\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha. \quad (6)$$

Тогда сила, с которой кольцо действует на всю полубесконечную нить, равна:

$$F = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos \alpha d\alpha = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (7)$$

Интересно, что точку приложения этой результирующей силы указать невозможно – она уходит на бесконечность. Можно изобразить равную ей и противоположно направленную силу F_k . Согласно третьему закону Ньютона, она приложена к кольцу в его центре.

Интегрирование по x выражения (4) с учетом того, что $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, дает тот же результат:

$$F = \int_0^{\infty} \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{xdx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (8)$$

Задача 4. Найти напряженность электрического поля, созданного поверхностью вращения в центре одной из ограничивающих ее окружностей. Задано уравнение образующей поверхности $y = y(x)$, причем $y(0) \neq 0$, $y(a) \neq 0$, $a < 0$ и поверхностная плотность заряда σ . Полученную формулу применить к случаю заряженной полусферы радиуса R .

$y = y(x)$	<p style="text-align: center;">Решение</p> <p>На рис. 1.4 а изображена поверхность вращения S, ограниченная окружностями в плоскостях $x = 0$ и $x = a < 0$. Поверхность можно представить в виде совокупности кольцевых бесконечно узких полосок, вырезанных плоскостями, перпендикулярными оси x с координатами x и $x + dx$.</p>
σ	
R	
$E(x) - ?$	

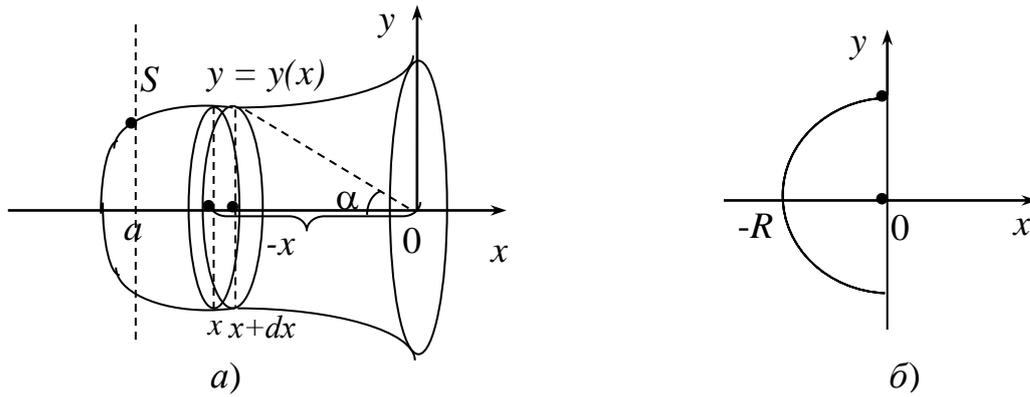


Рис. 1.4

Площадь поверхности такой полоски равна:

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (1)$$

ее заряд:

$$dq = \sigma \cdot dS = 2\pi\sigma y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2)$$

Здесь y' обозначает производную функции $y(x)$ по x .

В точке O , т. е. на расстоянии $(-x)$ от центра выделенного кольца, напряженность поля, согласно формуле (3) предыдущей задачи, равна:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(-x)^2} \cos \alpha, \quad (3)$$

где $\cos \alpha = \frac{(-x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Подставляя выражение для dq по формуле (2),

получаем:

$$dE = \frac{2\pi\sigma y \sqrt{1 + (y')^2} dx}{4\pi\epsilon_0(-x)^2} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^3 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{y \sqrt{1 + (y')^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} x dx. \quad (4)$$

Результирующую напряженность найдем интегрированием полученного выражения по x в пределах от a до 0 .

В качестве примера рассмотрим полусферу радиуса R , схематично представленную на рис. 1.4 б. Для нее:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad a = -R.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4), получаем:

$$dE = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - x^2} \cdot R}{R^3 \sqrt{R^2 - x^2}} x dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^2} x dx. \quad (5)$$

Интегрирование дает:

$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^2} \int_{-R}^0 x dx = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Задача 5. Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины l заряжен равномерно с линейной плотностью λ . Найти модуль и направление напряженности электрического поля в точке, которая отстоит от стержня на расстоянии a и находится на перпендикуляре к стержню, проходящем через один из его концов. Исследовать случай полубесконечного стержня.

l
λ
a
$E - ?$
$\operatorname{tg} \beta - ?$

Решение

Совместим начало координат с концом стержня, ось y направим вдоль стержня, а ось x – перпендикулярно ему.

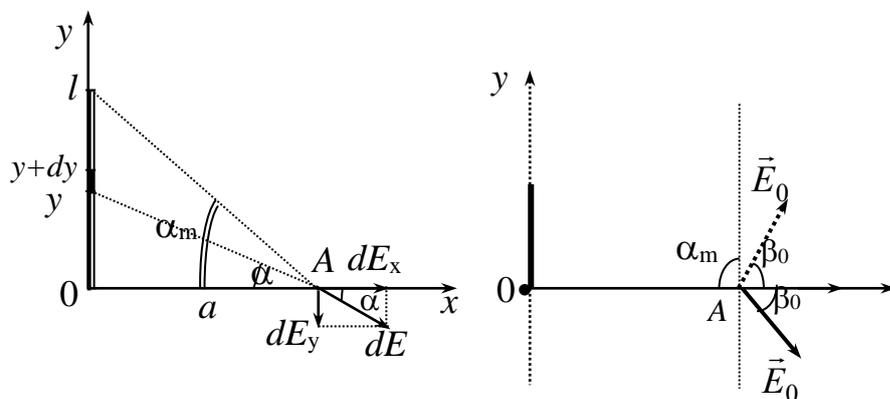


Рис. 1.5

Направления векторов напряженности на рис. 1.5 соответствуют положительно заряженному стержню. Его бесконечно малый элемент с координатой y длины dy несет заряд λdy , создающий в точке A напряженность электрического поля, определяемую формулой (1.3):

$$dE = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2}. \quad (1)$$

Координате y соответствует угол α .

Поскольку $y = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$, то $dy = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$, и для dE получаем:

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} d\alpha, \quad (2)$$

где $d\alpha$ – бесконечно малый угол, под которым из точки A виден элемент стержня dy .

Используя принцип суперпозиции (1.5), сложим все векторы $d\vec{E}$. Для этого надо сложить их компоненты:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\alpha d\alpha, \quad dE_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\alpha d\alpha. \quad (3)$$

В результате получим:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\alpha_m} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\alpha_m, \quad (4)$$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\alpha_m} \sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\alpha_m - 1).$$

Здесь α_m – угол, под которым виден второй конец стержня из точки A и который можно определить одним из соотношений:

$$\cos\alpha_m = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}; \quad \sin\alpha_m = \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}. \quad (5)$$

Модуль результирующего вектора напряженности найдем с учетом соотношений (5):

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha_m)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right)}. \quad (6)$$

Вектор \vec{E} образует с осью x угол β , определяемый с учетом (4) из соотношения:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|E_y|}{E_x} = \frac{1 - \cos \alpha_m}{\sin \alpha_m} = \sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 1} - \frac{a}{l}. \quad (7)$$

Для ответа на второй вопрос задачи перепишем формулы (6) и (7) в более компактном виде, воспользовавшись тригонометрическими соотношениями:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \cos \frac{\alpha_m}{2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_m}{2}. \quad (8)$$

Результат для полубесконечного стержня получим, устремив α_m к $\pi/2$ (теперь у стержня только один конец, и точка A лежит на перпендикуляре, проходящем через него, как показано на рисунке справа):

$$E_0 = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \beta_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (9)$$

Вектор напряженности поля бесконечного стержня можно найти как сумму векторов напряженностей двух симметрично расположенных полубесконечных стержней. Он направлен по оси x и по модулю равен:

$$E_\infty = 2E_0 \cos \beta_0 = 2 \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}. \quad (10)$$

Задача 6. Равномерно заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд λ , изогнута, как показано на рисунке. Радиус закругления R значительно меньше длины нити. Найти модуль напряженности в центре кривизны O закругленного участка.

Решение

λ
 R
 E -?

Заряженная нить состоит из трех участков: 1, 2, 3, указанных на рис. 1.6. AB и CD – полубесконечные нити, BC – дуга окружности. Участок 2 – это четверть окружности радиуса R ,

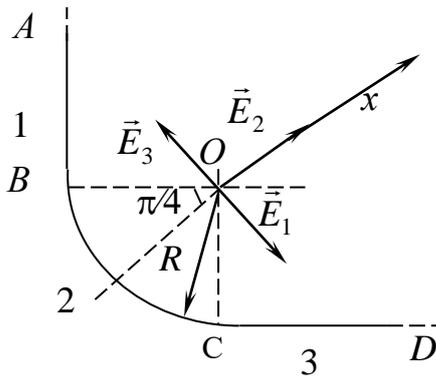


Рис. 1.6

которая создает поле с вектором напряженности \vec{E}_2 , направленным по биссектрисе прямого угла, образованного прямолинейными участками (на рисунке – ось x). Рассчитаем величину E_2 , воспользовавшись формулой (6) задачи 1, в которой верхний предел интегрирования $\frac{\pi}{2}$, соответствующий полуокружности, заменим на $\frac{\pi}{4}$ для четверти окруж-

ности. Получим:

$$E_2 = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1)$$

Для расчета напряженностей, создаваемых полубесконечными участками 1 и 3, можно воспользоваться результатом задачи 5. Вектор \vec{E}_1 составляет угол $\frac{\pi}{4}$ со своим участком 1, \vec{E}_3 – угол $\frac{\pi}{4}$ со своим участком 3, таким образом, эти векторы направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Их модули одинаковы в силу равноудаленности точки O от концов каждого из полубесконечных участков. Следовательно, при сложении векторов \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 по принципу суперпозиции (1.4) векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_3 взаимно уничтожаются, и в результате остается:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_2. \quad (2)$$

Модуль этого вектора, согласно (1), равен:

$$E = E_2 = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3)$$

Задача 7. Находящаяся в вакууме круглая тонкая пластинка с внутренним радиусом a и внешним b заряжена с поверхностной плотностью σ . Найти потенциал и модуль напряженности электрического поля на оси пластинки как функцию расстояния x от ее центра. Исследовать полученное выражение при $x \rightarrow 0$ и $x \gg b$.

Решение

a b <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> σ $\varphi - ?$ $B - ?$	<p>Электрическое поле однородно заряженной пластины осесимметрично, вектор напряженности на ее оси x направлен вдоль оси (рис. 1.7). Его величину можно получить дифференцированием потенциала, распределение которого находится по принципу суперпозиции (1.13 а). (Напомним, что расчет потенциала проще, поскольку это скалярная величина).</p>
---	---

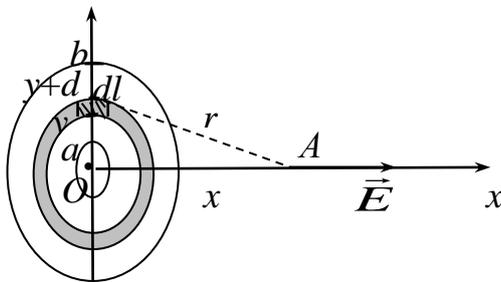


Рис. 1.7

Выделим на пластинке узкую кольцевую полоску с внутренним радиусом y и шириной dy , а на полоске – малый участок длины dl . Площадь его равна $dl \cdot dy$, а заряд $dq = \sigma dl \cdot dy$. Выделенный элемент можно рассматривать как точечный заряд. В точке A с координатой x на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ он создает потенциал (1.11):

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma dl dy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1)$$

Суммирование потенциалов от всех участков (по принципу суперпозиции) сводится к двойному интегралу:

$$\varphi = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi y} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} dl \right) dy = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_b^a \frac{2y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2} \right) \quad (2)$$

Вектор напряженности равен градиенту потенциала с противоположным знаком. В силу симметрии задачи он направлен вдоль оси x , воспользовавшись соотношением (1.10), найдем:

$$E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]. \quad (3)$$

Исследуем предельные случаи.

При $x \rightarrow 0$ получим:

$$\varphi(0) = \frac{\sigma(b-a)}{2\epsilon_0}; \quad E(0) = 0. \quad (4)$$

Для анализа полученных функций при $x \gg b$ преобразуем формулы (2) и (3):

$$\varphi(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{b}{x}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} \right],$$

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{x}\right)^2}} \right]. \quad (5)$$

Хотя $\frac{b}{x} \ll 1$, $\frac{a}{x} \ll 1$, просто пренебречь этими слагаемыми в формулах (5) нельзя: это дало бы $\varphi = 0$, $E = 0$, что соответствует бесконечно удаленным точкам, но не отражает характера убывания этих величин при удалении от центра пластинки.

Для получения искомой зависимости воспользуемся разложением в ряд функции вида $f(z) = (1+z)^p$ при $z \ll 1$ и ограничимся слагаемыми первого порядка малости:

$$(1+z)^p \approx 1 + pz . \quad (6)$$

Применяя это разложение к выражениям для потенциала $\varphi(x)$ ($p = 1/2$) и напряженности $E(x)$ ($p = -1/2$), получаем:

$$\varphi(x) \approx \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{x}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 \right] = \frac{\sigma(b^2 - a^2)}{4\varepsilon_0 x} = \frac{\sigma\pi(b^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} . \quad (7)$$

$$E(x) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{x}\right)^2 \right] = \frac{\sigma(b^2 - a^2)}{4\varepsilon_0 x^2} = \frac{\sigma\pi(b^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} . \quad (8)$$

Здесь через q обозначен полный заряд пластинки, равный $\sigma\pi(b^2 - a^2)$.

Полученные формулы (7) и (8) совпадают с формулами для потенциала и напряженности поля точечного заряда. Это означает, что на большом (по сравнению с ее размером) расстоянии пластинка создает такое поле, как если бы весь ее заряд был сосредоточен в одной точке – в ее центре.

Задача 8. Заряд Q распределен равномерно по объему шара радиуса R . Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, найти потенциал:

- а) в центре шара;
- б) внутри шара как функцию расстояния r от его центра.

Q	Решение
R	
$\varepsilon = 1$	
$\varphi(0) - ?$	
$\varphi(r) - ?$	

Физический смысл имеет только разность потенциалов, и если в задаче требуется найти значение потенциала в некоторой точке, то предполагается, что его значение в другой точке известно. Принято считать, что такой точкой является точка, бесконечно удаленная от заряженного объекта ($r \rightarrow \infty$), где потенциал полагается равным нулю. Значение же его в центре шара зависит

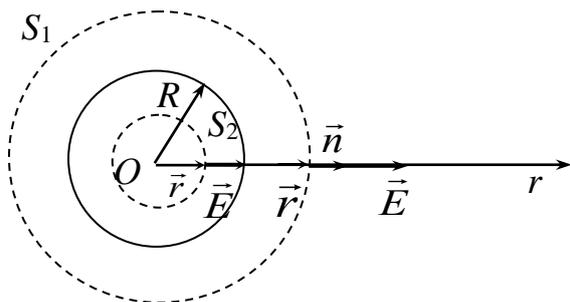


Рис. 1.8

от распределения заряда. Поскольку это распределение различно внутри и вне шара, необходимо решать последовательно внешнюю задачу (чтобы найти потенциал на поверхности шара), а затем – внутреннюю. Поле однородно заряженного шара центрально симметрично, т. е. вектор напряженности выражается

через радиус-вектор \vec{r} , как $\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ (рис. 1.8). В таком поле потенциал связан с напряженностью соотношением (1.10). Найдем выражение для напряженности электрического поля шара.

Для этого воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса (1.6) и запишем выражение для потока вектора \vec{E} через концентрическую с шаром сферическую поверхность S_1 некоторого радиуса $r > R$:

$$\Phi = \oint_{S_1} (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \oint_{S_1} (E(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} dS) = \oint_{S_1} E(r) dS = E(r) \cdot 4\pi r^2. \quad (1)$$

Здесь учтено, что скалярное произведение вектора $\frac{\vec{r}}{r}$ на единичный вектор нормали \vec{n} к сферической поверхности $(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}) = 1$. Поверхность S_1 охватывает весь заряженный шар, тогда согласно (1.6):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

(Так как по условию диэлектрическая проницаемость равна всюду единице, можно использовать теорему, сформулированную применительно к вакууму).

Итак, для $r > R$ получаем:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3)$$

а затем, согласно (1.10):

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr. \quad (4)$$

В результате интегрирования в пределах от точки с произвольным r до точки $r \rightarrow \infty$, где $\varphi = 0$, получаем:

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = -\int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr, \quad (5)$$

или

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

В частности, при $r \rightarrow R$ получаем:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (7)$$

Теперь при определении потенциала внутри шара точка на поверхности шара ($r = R$) будет выступать как точка с известным значением потенциала, определяемым формулой (7).

Рассмотрим сферическую поверхность S_2 , построенную внутри шара радиус этой поверхности меньше радиуса шара $r < R$. Поток вектора напряженности через нее по-прежнему выражается формулой (1). Но заряд q внутри сферы S_2 меньше заряда шара Q . При постоянной объемной плотности заряда ρ :

$$\begin{aligned} q &= \rho \cdot (4/3)\pi r^3, \\ Q &= \rho \cdot (4/3)\pi R^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая ρ , получим:

$$q = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (9)$$

Тогда согласно (1.6):

$$4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3}. \quad (10)$$

Итак, для $r < R$ получаем:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r. \quad (11)$$

Заметим, что при $r = R$ формулы (3) и (11), как и должно быть, дают одинаковый результат:

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \quad (12)$$

Согласно (1.10):

$$d\varphi = -E dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r dr. \quad (13)$$

Интегрируя в пределах от произвольного r до R , получаем:

$$\varphi(R) - \varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (r^2 - R^2). \quad (14)$$

Подставляя $\varphi(R)$ из (7), после преобразований получим зависимость потенциала от координаты внутри шара:

$$\varphi(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right). \quad (15)$$

В частности, при $r = 0$, т. е. в центре шара:

$$\varphi(0) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}. \quad (16)$$

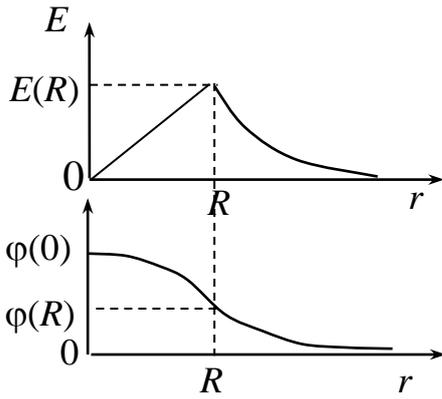


Рис. 1.9

Как видим, напряженность поля шара при $r < R$ пропорциональна расстоянию r (3), а при $r > R$ – обратно пропорциональна квадрату расстояния (11) от его центра. На рис. 1.9 вверху дан график этой зависимости. Ниже дан график для потенциала. Он состоит из ветви параболы (квадратичная зависимость (15) при $r < R$) и ветви гиперболы (обратно пропорциональная зависимость (6)), которые сопрягаются без

излома (производная $\frac{d\phi}{dr} = -E$ при $r = R$ непрерывна).

Задача 9. Тонкое кольцо радиуса $R = 25$ см имеет заряд $Q = 5$ мкКл,

$R = 25$ см
 $Q = 5$ мкКл
 $l = 50$ см
 $q = 10$ мкКл

 $A = ?$

неравномерно распределенный по кольцу. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда $q = 10$ мкКл из центра кольца по произвольному пути в точку, находящуюся на оси кольца на расстоянии $l = 50$ см от его центра.

Решение

Для нахождения работы, которую совершает электрическое поле, перемещая заряд из точки 1 в точку 2, необходимо знать потенциалы этих точек (1.15). Если бы точки были расположены произвольно, задача не имела бы решения, так как заряд на кольце распределен неравномерно, а закон распределения не задан. Однако для равноудаленных от кольца точек – точек его оси – решение существует.

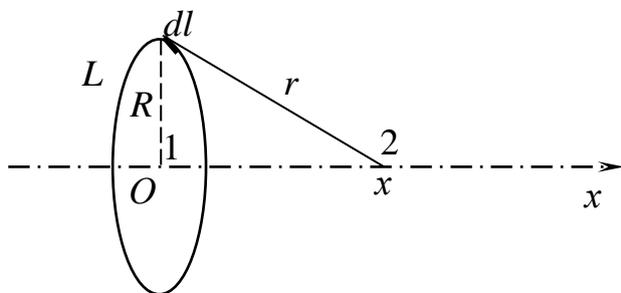


Рис. 1.10

Рассмотрим малый элемент дуги dl на кольце, несущий заряд dQ (рис. 1.10). В точке оси с координатой x (начало координат – в центре кольца)

этот заряд создает потенциал (1.11):

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (1)$$

Выражение в знаменателе не зависит от положения заряда dQ на кольце. Поэтому при интегрировании (для нахождения потенциала, созданного всем кольцом, по принципу суперпозиции) его можно вынести за знак интеграла:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \int_L dQ. \quad (2)$$

Интегрирование по всей длине кольца при любом распределении заряда на кольце дает полный заряд кольца:

$$\int_L dQ = Q. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в формулу (2), получим:

$$\varphi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (4)$$

В поле с таким распределением потенциала перемещается пробный заряд q из точки 1, где $x = 0$ в точку 2, где $x = l$. При этом поле кольца совершает работу, определяемую формулой (1.15):

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q[\varphi(0) - \varphi(l)] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2 + 1}} \right]. \quad (5)$$

Подставляя числовые значения, найдем:

$$A = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,25} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{50}{25}\right)^2 + 1}} \right] \approx 1 \text{ Дж.}$$

Задача 10. Система состоит из шара радиуса R , заряженного сферически симметрично, и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \frac{\alpha}{r}$, где α – постоянная, r – расстояние от центра шара ($r > R$). Найти заряд шара, при котором модуль напряженности электрического поля вне шара не зависит от r . Чему равна эта напряженность? Диэлектрическая проницаемость всюду $\varepsilon = 1$.

Решение

По условию $\varepsilon = 1$, что позволяет использовать соотношения для электрического поля в вакууме.

Напряженность поля сферически симметрично заряженной системы (она схематично изображена на рис. 1.11) проще всего находить по теореме

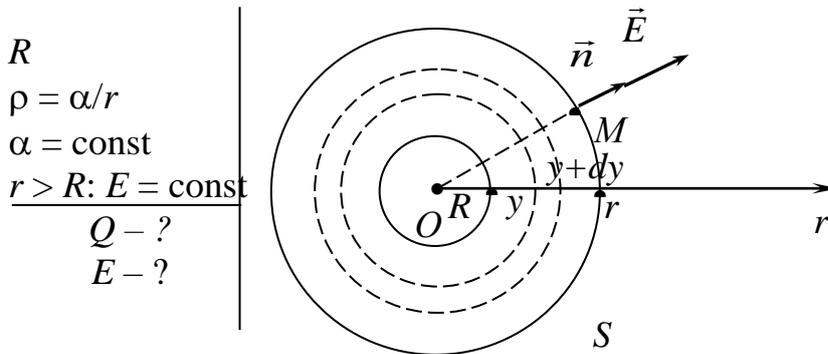


Рис. 1.11

Остроградского–Гаусса (1.6). Через точку M на расстоянии r от центра проведем сферическую поверхность S , поток вектора напряженности через которую равен:

$$4\pi r^2 \cdot E. \quad (1)$$

Здесь учтено, что векторы \vec{n} нормали и \vec{E} напряженности параллельны.

Заряд, заключенный внутри поверхности S , складывается из зарядов Q шара и $q(r)$ сферического слоя, в котором координата y меняется в пределах $R < y < r$. Согласно теореме (1.6):

$$4\pi r^2 E = \frac{Q + q(r)}{\varepsilon_0}. \quad (2)$$

Отсюда:

$$E = \frac{Q + q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3)$$

Независимость этого выражения от r возможна только при определенной зависимости $q(r)$ и соответствующем ей заряде Q .

Чтобы найти $q(r)$, представим сферический слой между шаром и сферой S в виде совокупности тонких сферических слоев радиуса y ($R < y < r$) и толщины dy . Объем бесконечно малого слоя $dV = 4\pi y^2 dy$, его заряд: $dq = \rho \cdot 4\pi y^2 dy = \frac{\alpha}{y} \cdot 4\pi y^2 dy = 4\pi\alpha y dy$. Тогда весь заряд между шаром и сферой S равен:

$$q(r) = \int dq = \int_R^r 4\pi\alpha y dy = 2\pi\alpha(r^2 - R^2). \quad (4)$$

Подставляя полученное значение $q(r)$ в выражение (3), получаем:

$$E = \frac{Q + 2\pi\alpha(r^2 - R^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q - 2\pi\alpha R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\alpha}{2\epsilon_0}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что при

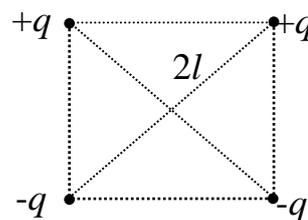
$$Q = 2\pi\alpha R^2 \quad (6)$$

напряженность не зависит от r и равна:

$$E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}.$$

Задачи для контроля

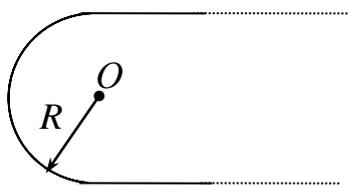
1. В вершинах квадрата с диагональю $2l$ находятся точечные заряды q и $-q$, как показано на рисунке. Найти модуль напряженности электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от центра квадрата и расположенной симметрично относительно вершин квадрата.



2. Две длинные параллельные нити равномерно заряжены, каждая с линейной плотностью $\lambda = 0,5$ мкКл/м. Расстояние между нитями $l = 45$ см. Найти максимальное значение модуля напряженности электрического поля в плоскости симметрии этой системы, расположенной между нитями.

3. Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, где ρ_0 и α – положительные постоянные, r – расстояние от центра системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию r . Исследовать полученное выражение при малых и больших r , т. е. при $\alpha r^3 \ll 1$ и $\alpha r^3 \gg 1$.

4. Имеются два тонких проволочных кольца радиуса R каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны q и $-q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстояние l , если $R = 30$ см, $l = 52$ см, $q = 0,4$ мкКл.



5. Равномерно заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд λ , имеет конфигурацию, показанную на рисунке. Радиус закругления R значительно меньше длины нити. Найти модуль напряженности электрического поля в точке O .

6. Потенциал поля в некоторой области пространства зависит только от координаты y как $\varphi = -ay^3 + b$, где a и b – некоторые постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(y)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. С какой силой взаимодействовали бы два медных шарика, каждый массой 1 г, находясь на расстоянии 1 м друг от друга, если бы суммарный заряд всех электронов в них отличался на 1 % от суммарного заряда всех ядер?

Ответ: около $2 \cdot 10^{15}$ Н.

2. Кольцо радиуса r из тонкой проволоки имеет заряд q . Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца как функцию расстояния l до его центра. Исследовать полученную зависимость при $l \gg r$. Определить максимальное значение напряженности и соответствующие расстояние l . Изобразить примерный график функции $E(l)$.

Ответ: 1) $E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2)^{3/2}}$; при $l \gg r$ $E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$;

$$E_{\max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 r^2} \text{ при } l = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

3. Точечный заряд q находится в центре тонкого кольца радиуса R , по которому равномерно распределен заряд $-q$. Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от оси кольца на расстояние x , если $x \gg R$.

Ответ: $E = \frac{3qR^2}{4\pi\epsilon_0 x^4}$.

4. Шар радиуса R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит от расстояния r до центра как $\rho = \rho_0(1 - \frac{r}{R})$, где ρ_0 – постоянная. Полагая, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$ всюду, найти:

- а) модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию r ;
- б) максимальное значение модуля напряженности E_{\max} и соответствующее ему значение r_m .

Ответ: а) $E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$ при $r \leq R$,

$$E = \frac{\rho R^3}{12\epsilon_0 r^2} \text{ при } r \geq R;$$

б) $E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0}$ при $r_m = \frac{2}{3}R$.

5. Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0,4$ мкКл/м. Вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится дальше от нити, чем точка 1, в $\eta = 2$ раза.

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = \ln \eta \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = 5$ кВ.

6. Определить напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат x, y по закону:

$$1) \varphi = a(x^2 - y^2); \quad 2) \varphi = axy,$$

где a – постоянная. Изобразить примерный вид этих полей при помощи линий вектора \vec{E} (в плоскости xy).

Ответ: 1) $\vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j})$;

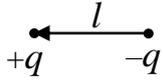
2) $\vec{E} = -a(y\vec{i} + x\vec{j})$, \vec{i}, \vec{j} – орты осей x, y .

II. Поле в диэлектриках

§ 9. Поляризация диэлектриков

Диэлектриками (изоляторами) называются вещества, способность которых проводить электрический ток в 10^{15} – 10^{20} раз меньше, чем у веществ, называемых проводниками.

Диэлектрики состоят из атомов и молекул. Диэлектрик в целом нейтрален, поскольку положительный заряд ядер компенсируется отрицательным зарядом электронов. Диэлектрик может состоять из полярных или неполярных молекул. В отсутствие внешнего поля дипольные моменты неполярных молекул равны нулю, либо, в случае полярных молекул, распределены по направлениям хаотически, таким образом, суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю.



Если диэлектрик внести в электрическое поле, то и диэлектрик, и поле претерпевают существенные изменения. Действие внешнего поля на полярные молекулы сводится к тому, чтобы повернуть молекулу по направлению поля. Под действием внешнего электрического поля заряды нейтральных молекул, образующих диэлектрик, смещаются, положительные по полю, отрицательные – против, в результате молекула приобретает так называемый дипольный момент $\bar{p} = q\bar{l}$, величина которого пропорциональна напряженности электрического поля:

$$\bar{p} = \beta \epsilon_0 \bar{E},$$

где β – величина, называемая поляризуемостью молекулы, она имеет размерность объема – L^3 .

Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется, т. е. приобретает дипольный момент. В качестве меры этой поляризации берут дипольный момент единицы объема. Разбив объем на физически бесконечно малые объемы и просуммировав дипольные моменты, получим:

$$\bar{P} = \frac{\sum \bar{p}}{\Delta V},$$

где \bar{P} – поляризованность диэлектрика.

По размерности $[P] = [q \cdot L^{-2}]$ совпадает с размерностью $\varepsilon_0 E$.

Для изотропных диэлектриков

$$\bar{P} = \kappa \varepsilon_0 \bar{E},$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, это безразмерная величина.

§ 10. Поле внутри диэлектрика

Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными, под действием внешнего поля эти заряды несколько смещаются из положения равновесия, но не покидают своих молекул.

Заряды, которые находятся в пределах диэлектрика, но не входят в состав его молекул, а также заряды, находящиеся за пределами диэлектрика, называются сторонними.

Результирующее микроскопическое поле в диэлектрике есть суперпозиция поля сторонних и поля связанных зарядов:

$$\bar{E}_{\text{микро}} = \bar{E}_{\text{стор}} + \bar{E}_{\text{связ}}.$$

Наблюдаемое или действующее, или макроскопическое поле определяется средним значением микроскопического поля:

$$\bar{E} = \langle \bar{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \bar{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \bar{E}_{\text{связ}} \rangle,$$

т. е.

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}',$$

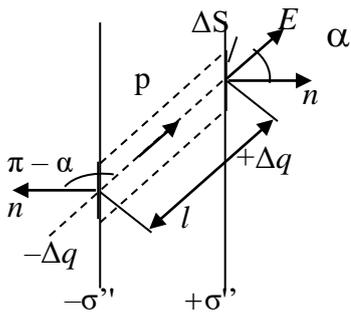
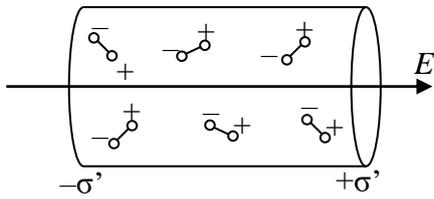
здесь \bar{E}_0 и \bar{E}' средние поля сторонних и связанных зарядов соответственно.

Тогда для поляризованности \bar{P} , подставив макроскопическое поле, получим:

$$\bar{P} = \kappa \varepsilon_0 (\bar{E}_0 + \bar{E}').$$

§ 11. Объемные и поверхностные связанные заряды

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле в результате поляризации возникает поверхностная или объемная плотность зарядов.



Очевидно, что поляризованность P и поверхностная σ' или объемная ρ' плотность связанных зарядов должны быть связаны между собой. Для нахождения этой связи рассмотрим бесконечную плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика, помещенную в однородное электрическое поле. Выделим очень тонкий цилиндр с образующими, параллельными полю, тогда его объем:

$$\Delta V = \Delta S \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

Этот объем имеет дипольный электрический момент, который можно выразить через поляризованность

$$p = P \Delta V = P l \Delta S \cos \alpha,$$

но с другой стороны этот цилиндр эквивалентен диполю с зарядами $+\sigma' \Delta S$ и $-\sigma' \Delta S$ и расстоянием между ними l . Поэтому p можно записать в виде:

$$p = \sigma' \Delta S l,$$

приравнявая два последних выражения, получим:

$$\sigma' \Delta S l = P l \Delta S \cos \alpha.$$

Откуда находим искомую связь:

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

где P_n – нормальная к поверхности пластины составляющая поляризованности, знак поверхностной плотности связанных зарядов σ' определяется знаком $\cos\alpha$, т. е. углом между внешней нормалью и полем.

Учтя связь между P и E можем написать:

$$\sigma' = \varepsilon_0 \kappa E_n.$$

Для объемной плотности связанных зарядов ρ' легко получить выражение:

$$\rho' = -\bar{\nabla} P = -\text{div} \bar{P}.$$

§ 12. Вектор электрического смещения

Итак, источником поля служат сторонние и связанные заряды. Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$\bar{\nabla} E = \text{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho').$$

Тогда, используя приведенную выше связь между объемной плотностью связанных зарядов и поляризованностью, найдем:

$$\bar{\nabla} E = \text{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \text{div} \bar{P}),$$

или

$$\text{div}(\varepsilon_0 E + \bar{P}) = \rho,$$

$$\text{div} \bar{D} = \rho.$$

Величина $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$ называется электрическим смещением или электрической индукцией, определяется только сторонними зарядами.

Подставив в выражение для электрической индукции \bar{D} поляризованность $\bar{P} = \kappa \varepsilon_0 \bar{E}$, получим:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \bar{E},$$

$\varepsilon = 1 + \kappa$ — называется относительной диэлектрической проницаемостью или просто диэлектрической проницаемостью среды, тогда:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \bar{E}.$$

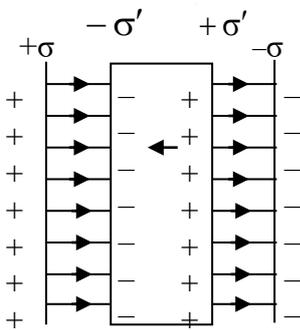
Подставив выражение для \bar{E} , найдем зависимость D от q и r .

Проведенное рассмотрение справедливо для изотропного диэлектрика.

§ 13. Поле внутри плоской пластины

Рассмотрим поле, созданное двумя бесконечными параллельными плоскостями в вакууме (его напряженность легко рассчитать, воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$



Внесем в это поле однородную пластину из изотропного диэлектрика и расположим ее так, чтобы поле было перпендикулярно боковым поверхностям. Под действием поля пластин диэлектрик будет поляризоваться, на его поверхностях образуются заряды $\pm \sigma'$, которые создадут внутри диэлектрика поле $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$, тогда результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma'),$$

вне диэлектрика – по-прежнему $E = E_0$.

Поляризация диэлектрика обусловлена эффективным полем E .

Поляризованность $\bar{P} = \kappa\varepsilon_0\bar{E}$, тогда ее нормальная составляющая равна: $P_n = \kappa\varepsilon_0E_n = \sigma'$.

Поле \bar{E} перпендикулярно поверхности пластины, т. е. $E = E_n$, тогда:

$$\sigma' = \kappa\varepsilon_0E.$$

Подставляя в предыдущую формулу, получим:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') = E_0 - \kappa E,$$

или

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

т. е. поле в диэлектрике ослабляется в ε раз.

Легко получить выражение для D :

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E = \varepsilon_0E_0 = D_0, \quad \varepsilon = 1 + \kappa.$$

Таким образом, электрическое смещение D внутри и вне пластины одинаково. Найдем поверхностную плотность связанных зарядов.

Подставляя найденные выше соотношения для E и E_0 в формулу $E = \frac{E_0}{\varepsilon}$, получим:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

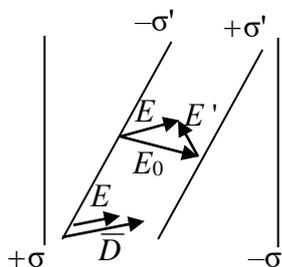
откуда:

$$\sigma' = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

или

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma,$$

т. е. поверхностная плотность связанных зарядов σ' определяется величиной диэлектрической проницаемости. σ' всегда меньше, чем σ . Направления \bar{D} и \bar{E}_0 в общем случае не совпадают.



Если однородный и изотропный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля сторонних зарядов, то \bar{D} совпадает по направлению с \bar{E}_0 , а напряженность поля внутри диэлектрика в ε раз меньше \bar{E}_0 .

Рассмотрим две диэлектрические пластины с проницаемостями ε_1 и ε_2 , помещенные во внешнее электрическое поле, так что они соприкасаются друг с другом. В результате поляризации на поверхности пластин возникнут связанные заряды, плотности которых, в силу различия диэлектрических проницаемостей, будут различны. Это приведет к тому, что плоскость границы раздела диэлектриков будет заряжена с поверхностной плотностью зарядов, определяемой разностью плотностей связанных зарядов, возникших в каждом диэлектрике. Тогда при переходе из одного диэлектрика в другой должны изменяться напряженность и индукция электрического поля. Можно показать, что на границе раздела двух диэлектриков при отсутствии свободных электрических зарядов должны выполняться граничные условия:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2},$$

где \bar{n} и $\bar{\tau}$ – единичные векторы нормали и касательной к границе раздела.

Из приведенных выражений видно, что тангенциальная составляющая вектора напряженности и нормальная составляющая вектора индукции электрического поля меняются непрерывно, а нормальная составляющая вектора напряженности и тангенциальная составляющая вектора индукции терпят разрыв при переходе из одной среды в другую.

§ 14. Емкость и энергия электрического поля

Как было указано выше, сообщенный проводнику заряд распределяется так, чтобы поле внутри было равно нулю. Заряженный проводник создает в окружающем пространстве электрическое поле, напряженность которого зависит от величины заряда. Из связи между напряженностью и потенциалом электрического поля следует, что потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду:

$$q = C\varphi.$$

Коэффициент пропорциональности C называется емкостью проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Емкостью уединенного проводника называется отношение заряда этого проводника к его потенциалу.

В качестве примера найдем емкость уединенного шара. Для этого вычислим потенциал заряженного шара радиуса R . Поле шара, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε , как показано выше, есть:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2},$$

учитывая, что

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

найдем ($\varphi_\infty = 0$):

$$\varphi = \int_R^\infty E_r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{R}.$$

Откуда:

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

За единицу емкости принимают емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл. Эта единица называется фарад. В СГСЭ-системе за единицу емкости принимается емкость находящегося в вакууме уединенного шара радиусом 1 см. Эта единица называется сантиметр. Найдем радиус шара, емкость которого будет равна 1 фарад:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} \text{ СГСЭ ед. емкости} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Т. е. шар емкостью в 1 фарад должен иметь радиус примерно в 1 500 раз больший радиуса Земли!!!

Уединенные проводники обладали бы небольшой емкостью. Чтобы ее увеличить, используют системы проводников, называемые конденсаторами.

Конденсаторы делают в виде двух проводников, расположенных близко друг к другу. Эти проводники называются обкладками конденсатора. Чтобы исключить влияние внешних тел, проводники располагают так, чтобы создаваемое ими поле было сосредоточено внутри конденсатора. При этом заряды на обкладках равны по величине и противоположны по знаку. Основная характеристика конденсатора – это его емкость:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ называется напряжением между обкладками конденсатора U . Тогда:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Для увеличения емкости конденсатора пространство между обкладками заполняют диэлектриком.

Найдем формулу для емкости плоского конденсатора, который состоит из двух параллельных пластин площадью S , расположенных на расстоянии d друг от друга. Для плоского конденсатора расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров. В этом случае можно считать, что электрическое поле сосредоточено в зазоре между пластинами и равно:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора.

Поскольку поле однородно, разность потенциалов между обкладками плоского конденсатора равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

откуда:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Из последней формулы видно, что емкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади его пластин и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

Для справок

Емкости цилиндрического и сферического конденсаторов соответственно равны:

$$C_{ц} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad C_c = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Конденсаторы характеризуются U_{\max} – максимально допустимым напряжением между обкладками, т. е. напряжением, при котором еще не наступает пробой диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками конденсатора.

Для получения более широкого спектра характеристик конденсаторы соединяют в батареи.

Заряженный конденсатор обладает энергией, которую можно выразить через параметры конденсатора и напряженность поля между его обкладками, используя полученное ранее выражение для энергии взаимодействия системы зарядов:

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

подставляя сюда выражение для емкости плоского конденсатора и учитывая, что $E=U/d$, найдем:

$$W = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon U^2}{2} \frac{Sd}{d^2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V.$$

Тогда для плотности энергии электрического поля, сосредоточенного в конденсаторе, получим: $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$. В этой формуле нет характеристик плоского конденсатора, на примере которого проводилось рассмотрение, следовательно, оно справедливо для любого электрического поля.

Сводка основных формул и задачи к разделу II

Под действием электрического поля диэлектрики поляризуются, в них возникают связанные заряды. Поляризация диэлектриков характеризуется поляризованностью \vec{P} , которая равна суммарному дипольному моменту \vec{p}_i молекул в единице объема: $\vec{P} = \sum_{\Delta V} \frac{\vec{p}_i}{\Delta V}$. Поверхностная σ' и объемная ρ' плотности связанных зарядов определяются поляризованностью вещества:

$$P_n = \sigma', \quad \nabla \vec{P} = -\rho', \quad (2.1)$$

где P_n – проекция вектора \vec{P} на направление внешней нормали к поверхности.

Для изотропных диэлектриков поляризованность пропорциональна напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (2.2)$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Электрическое поле в диэлектриках характеризуют электрическим смещением \vec{D} , которое определяется соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.3)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon = 1 + \kappa$ – относительная диэлектрическая проницаемость.

Теорема Остроградского–Гаусса для вектора \vec{D} : поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов в объеме, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2.5)$$

Уравнения электростатики в веществе имеют вид:

интегральная форма

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}; \quad (2.6)$$

дифференциальная форма

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho, \quad [\vec{\nabla} \cdot \vec{E}] = 0. \quad (2.7)$$

Первое уравнение (2.6) указывает на существование в природе электрических зарядов, второе выражает потенциальность электростатического поля, третье учитывает электрические свойства вещества.

На границе раздела двух диэлектриков при отсутствии свободных электрических зарядов выполняются граничные условия:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (2.8)$$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}, \quad \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2},$$

где \vec{n} и $\vec{\tau}$ – единичные векторы нормали и касательной к границе раздела.

Для однородного и изотропного диэлектрика напряженность и потенциал поля точечного заряда в ϵ раз меньше, чем в вакууме:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (2.9)$$

Уравнение Пуассона для однородного и изотропного диэлектрика имеет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.10)$$

В электрическом поле заряды находятся только на поверхности проводника. Внутри проводника напряженность равна нулю, потенциал везде одинаков, объемные заряды отсутствуют.

$$E = 0, \quad \rho = 0, \quad \varphi = \text{const}. \quad (2.11)$$

Поверхность проводника является эквипотенциальной, вектор напряженности электрического поля перпендикулярен поверхности и пропорционален поверхностной плотности заряда:

$$E = E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2.12)$$

Внутри замкнутой проводящей оболочки напряженность электрического поля равна нулю. На этом основано действие электростатической защиты.

Электрическое поле в веществе также подчиняется принципу суперпозиции и складывается из электрического поля в вакууме \vec{E}_0 и поля индуцированных зарядов \vec{E}' :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (2.13)$$

Способность проводников накапливать электрические заряды называется электроемкостью (или просто емкостью).

Емкость C единичного проводника определяется отношением его заряда q к потенциалу φ поверхности:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2.14)$$

Емкость шара пропорциональна его радиусу:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \quad (2.15)$$

Конденсатор представляет собой два проводника (обкладки), расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Емкость конденсатора равна отношению заряда q к напряжению U между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (2.16)$$

Емкость конденсатора определяется только его геометрическими размерами и свойствами диэлектрика. Две параллельные пластины площадью S , находящиеся на малом расстоянии d , образуют плоский конденсатор емкостью:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (2.17)$$

Без учета краевых эффектов поле плоского конденсатора однородно с напряженностью $E = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon$ и сосредоточено только между пластинами.

Заряженный конденсатор обладает энергией:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.18)$$

Конденсаторы соединяют в батарее последовательно и параллельно. При последовательном соединении емкость батареи определяется выражением:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (2.19)$$

Заряды конденсаторов одинаковые, а напряжения складываются:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n, \quad U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

При параллельном соединении емкости батареи и заряды складываются:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, \quad q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (2.20)$$

а напряжения на всех конденсаторах одинаковы:

$$U_1 = U_2 = U_n.$$

Электрическое поле обладает энергией. Плотность энергии w электрического поля (энергия единицы объема) определяется выражением:

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (2.21)$$

С учетом формулы (2.3) плотность энергии электрического поля можно представить в виде:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}. \quad (2.22)$$

Первое слагаемое в (2.22) дает энергию поля в вакууме, а второе – работу по поляризации диэлектрика.

Энергия электрического поля в объеме V находится интегрированием по этому объему:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV. \quad (2.23)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Имеются две бесконечные параллельные плоскости, заряженные с плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Первоначально они находятся в вакууме. Затем зазор между плоскостями заполняется однородным изотропным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε . Какими станут напряженность поля \vec{E} , электрическое смещение \vec{D} и разность потенциалов U между плоскостями?

Решение

$\frac{\pm\sigma}{\varepsilon}$ $\vec{E}, \vec{D} - ?$ $U - ?$	<p>В силу симметрии, электрическое поле между плоскостями однородное (рис. 2.1). Проще всего сначала найти электрическое смещение \vec{D}, которое определяется только свободными зарядами и между плоскостями будет равно:</p>
--	--

$$D = \sigma. \quad (1)$$

Напряженность поля определяется по формуле (2.4)

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2)$$

Разность потенциалов найдем, проинтегрировав \vec{E} вдоль прямой от положительно до отрицательно заряженной плоскости:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_{(1)}^{(2)} E dl = \frac{\sigma l}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (3)$$

где l – расстояние между плоскостями.

В отсутствие диэлектрика характеристики поля равны:

$$D_0 = \sigma, \quad E_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \varphi_{10} - \varphi_{20} = U_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l. \quad (4)$$

Сравнивая (1)–(3) и (4) видим, что после внесения диэлектрика индукция D не изменилась, а E и U уменьшились в ε раз. Ослабление напряженности поля и потенциала обусловлено появлением на поверх-

ности диэлектрика связанных зарядов с плотностью $\pm\sigma'$. Причем возле плоскостей появляются связанные заряды противоположного знака, которые создают электрическое поле с напряженностью \vec{E}' , ослабляющее поле свободных зарядов \vec{E}_0 .

Задача 2. В однородном электрическом поле с напряженностью $E_0 = 100$ В/м находится бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного изотропного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, расположенная перпендикулярно \vec{E}_0 . Определить напряженность поля \vec{E} и электрическое смещение \vec{D} внутри пластины, поляризованность P диэлектрика и поверхностную плотность связанных зарядов σ' .

Решение

$$\left. \begin{array}{l} E_0 = 100 \text{ В/м} \\ \varepsilon = 2 \\ \vec{E}, D, P, \sigma' - ? \end{array} \right|$$

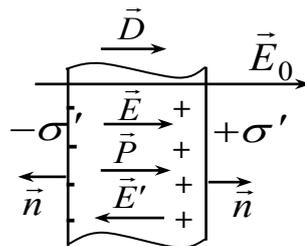


Рис. 2.1

На границе раздела диэлектриков выполняются граничные условия (2.8), которые для этой задачи запишутся в виде:

$$E_0 = \varepsilon E, \quad D_0 = D, \quad (1)$$

где $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ смещение в вакууме. Отсюда для E и D получаем:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = 5 \text{ В/м}, \quad D = \varepsilon_0 E_0 = 0,885 \text{ нКл/м}^2. \quad (2)$$

Поляризованность связана с напряженностью выражением (2.2):

$$P = \kappa \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon} = 0,44 \text{ нКл/м}^2. \quad (3)$$

Поверхностная плотность зарядов определяется первым из соотношений (2.1). Учитывая, что в силу перпендикулярности \vec{E}_0 и пластины $P_n = \pm P$, получаем:

$$\sigma' = P_n = \pm \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 = \pm 0,44 \text{ нКл/м}^2. \quad (4)$$

Знак (\pm) в (4) соответствует разноименным зарядам. Направления всех векторов и полярность связанных зарядов приведены на рис. 2.1.

Задача 3. Бесконечная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε находится в вакууме и заряжена однородно с объемной плотностью ρ . Толщина пластины $2a$.

- Найти потенциал φ и напряженность поля E внутри и вне пластины как функции расстояния x до середины пластины. Потенциал в середине пластины считать равным нулю.
- Определить поляризованность P диэлектрика, объемную ρ' и поверхностную σ' плотность связанных зарядов.

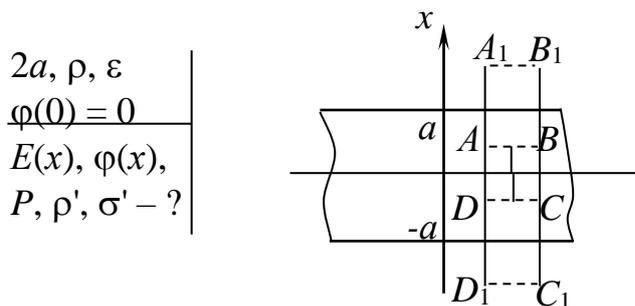


Рис. 2.2

Решение

Электрическое поле пластины, как и поле бесконечной плоскости, обладает плоской симметрией. Это значит, что вектор электрического смещения \vec{D} перпендикулярен плоскости пластины и зависит только от

расстояния до середины пластины. Выберем ось x перпендикулярно пластине с началом в ее середине (рис. 2.2).

Для определения индукции D воспользуемся теоремой Остроградского—Гаусса (2.5). В качестве контрольного объема для интегрирования возьмем прямой параллелепипед, расположенный симметрично серединной плоскости пластины (на рис. 2.2 сечение параллелепипеда изображено прямоугольником $ABCD$). Рассмотрим поле внутри пластины, это значит $|x| \leq a$. Пусть основания параллелепипеда AB и CD расположены на расстоянии x . При вычислении потока учтем, что вектор \vec{D} параллелен боковой поверхности параллелепипеда и перпендикулярен основаниям. Для потока \vec{D} получим:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 2DS_0, \quad (1)$$

где S_0 – площадь основания параллелепипеда.

Заряд в контрольном объеме найдем интегрированием:

$$\int_V \rho dV = \rho \cdot S_0 \cdot 2x. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2) по теореме Остроградского–Гаусса, находим электрическое смещение:

$$D = \rho \cdot x. \quad (3)$$

Напряженность поля E найдем из соотношения (2.4):

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot x}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Напряженность и потенциал электрического поля связаны соотношением:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad (5)$$

интегрируя которое, находим потенциал:

$$\varphi = -\int E dx = -\int \frac{\rho \cdot x}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = -\frac{\rho \cdot x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + C.$$

Постоянная интегрирования C находится из начального условия

$$\varphi(0) = 0 = C.$$

Окончательно для потенциала внутри пластины получим:

$$\varphi = -\frac{\rho \cdot x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Потенциал, а затем и другие характеристики поля можно найти другим способом, решив уравнение Пуассона (2.10), которое для данной задачи имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

В уравнении Пуассона записаны полные производные, потому что φ зависит только от одной координаты \tilde{d} .

После интегрирования уравнения имеем:

$$\varphi = -\frac{\rho \cdot x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + C_1 \cdot x + C_2. \quad (7)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий:

$$\varphi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

Первое из условий (8) соответствует требованиям задачи, а второе – отражает симметрию поля относительно середины пластины (в середине пластины $E = 0$), с учетом условий (8) найдем, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, и получим решение (6).

Рассмотрим электрическое поле вне пластины, т. е. при $|x| > a$. Электрическое смещение найдем по теореме Остроградского–Гаусса, как было описано выше. Интегрирование проводится по параллелепипеду, сечение которого изображено на рис. 2.2 прямоугольником $A_1B_1C_1D_1$.

Для потока и заряда имеем:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 2DS_0, \quad \int_V \rho dV = \rho S_0 \cdot 2a. \quad (9)$$

Здесь учтено, что заряд имеется только в той части объема, которая находится в пластине.

Приравняв правые части выражений (9), находим сначала электрическое смещение D , а потом напряженность поля E :

$$D = \rho \cdot a, \quad E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}. \quad (10)$$

Потенциал φ определим, проинтегрировав (5):

$$\varphi = -\int E dx = -\int \frac{\rho a}{\varepsilon_0} dx = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} x + C'. \quad (11)$$

Постоянная C' находится из условия непрерывности потенциала на поверхности пластины. Потенциал должен быть непрерывным, так как его производная дает напряженность поля. Если φ имеет разрыв, то E в этой точке стремится к бесконечности, что не соответствует физическому смыслу.

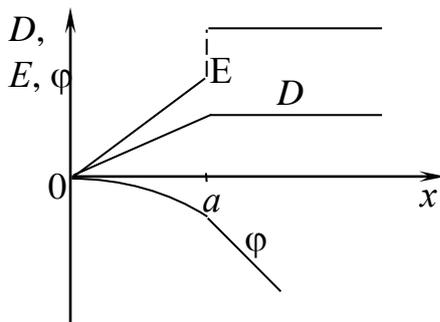


Рис. 2.3

Приравнявая (6) и (11) при $x = a$, находим:

$$C' = \frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \rho a^2$$

и

$$\varphi = \frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \rho a^2 - \frac{\rho a}{\varepsilon_0} x. \quad (12)$$

Полученные зависимости графически изображены на рис. 2.3.

Найдем поляризованность и связанные заряды в диэлектрике. По формуле (2.2) для поляризованности имеем:

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon} x. \quad (13)$$

Поверхностную и объемную плотность связанных зарядов найдем, используя соотношения (2.1):

$$\sigma' = P|_{x=a} = \frac{(\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon} a, \quad \rho' = -\frac{dP}{dx} = -\frac{(\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon}. \quad (14)$$

Из выражений (14) видно, что на поверхности пластины возникает связанный заряд такого же знака, как и свободный. Объемный связанный заряд имеет противоположный знак.

Потенциал φ вне пластины можно найти из уравнения (2.10), которое для этой области имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0.$$

Запишем решение уравнения

$$\varphi = C_3x + C_4.$$

Постоянные C_3 и C_4 находятся из граничных условий на поверхности пластины:

$$\varphi \Big|_{x=a-0} = \varphi \Big|_{x=a+0}, \quad \varepsilon \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x-0} = \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x+0}.$$

Первое из условий выражает непрерывность потенциала, а второе – соответствует условию (2.8) для напряженности поля. После подстановки и дифференцирования приходим к уравнениям

$$-\frac{\rho a^2}{\varepsilon \varepsilon_0} = C_3 a + C_4, \quad -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} = C_3.$$

Отсюда находим:

$$C_3 = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}, \quad C_4 = \frac{\rho a^2}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

и после подстановки постоянных приходим к выражению (12).

ρ
R
ε
$E, \varphi - ?$
$P, \sigma', \rho' - ?$

Задача 4. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho > 0$ по шару радиуса R из однородного диэлектрика с проницаемостью ε . Найти зависимость напряженности и потенциала от расстояния r до центра шара. Определить поляризованность, поверхностную и объемную плотность связанных зарядов.

Решение

Искомое электрическое поле обладает центральной симметрией, следовательно, его характеристики зависят только от расстояния r до центра шара. Поэтому для решения задачи удобно воспользоваться теоремой Остроградского–Гаусса для электрического смещения (2.5). Сначала рассмотрим поле внутри шара ($r < R$). Для определения потока вектора электрического смещения \vec{D} возьмем сферическую поверхность радиуса r , центр которой совпадает с центром шара. В силу симметрии на сферической поверхности электрическое смещение \vec{D} постоянно, и для потока D имеем:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi r^2 D. \quad (1)$$

Внутри сферической поверхности заключен заряд

$$q = \int_V \rho dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad (2)$$

который составляет часть заряда шара, так как $r < R$. Приравнявая (1) и (2), находим смещение D и напряженность E

$$D = \frac{1}{3}\rho r, \quad E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Рассуждая аналогично, для электрического смещения D снаружи шара ($r > R$) получим:

$$4\pi r^2 D = (4/3)\pi R^3 \rho = q,$$

где q – заряд шара. Отсюда найдем D , а затем напряженность поля E :

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Для нахождения потенциала φ воспользуемся связью между E и φ , которая для центрально симметричного поля запишется в виде:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение внутри и снаружи шара, получим следующие выражения для потенциала:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + C_1, & r \leq R, \\ \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2, & r > R. \end{cases} \quad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из условий непрерывности и нормировки потенциала. На поверхности шара потенциал непрерывен (см. задачу 3), а на бесконечности стремится к нулю:

$$\begin{aligned} -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + C_1 &= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} + C_2, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из условий (6) находим:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{2\varepsilon + 1}{6\varepsilon\varepsilon_0} \rho R^2.$$

После подстановки постоянных для потенциала имеем:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2\varepsilon + 1}{6\varepsilon\varepsilon_0} \rho R^2 - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0}, & r \leq R; \\ \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R. \end{cases} \quad (7)$$

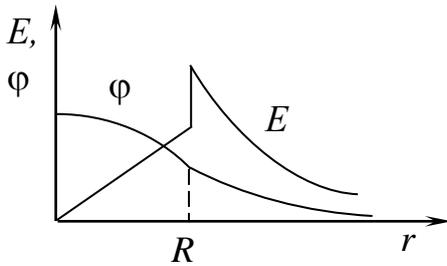


Рис. 2.4

На рис. 2.4 зависимости E и φ от r изображены графически. При $r = R$ кривая для потенциала имеет излом, а для напряженности — разрыв. Причем напряженность снаружи на поверхности шара в ε раз больше, чем внутри. Это связано с поверхностными связанными зарядами. Поляризованность диэлектрика найдем по формуле (2.2):

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon - 1)}{3\varepsilon} \rho r. \quad (8)$$

Объемную и поверхностную плотность связанных зарядов определим из соотношений (2.1):

$$\rho' = -\nabla \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho, \quad \sigma' = P_n = \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon} \rho R.$$

При вычислении ρ' учтено, что $\operatorname{div} \vec{r} = 3$. Действительно, прямым дифференцированием получаем:

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Задача 5. Однородный диэлектрик с относительной проницаемостью ε имеет вид сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого a и b . Определить напряженность электрического поля как функцию расстояния до центра системы, если диэлектрик заряжен однородно положительным свободным зарядом с объемной плотностью ρ .

Решение

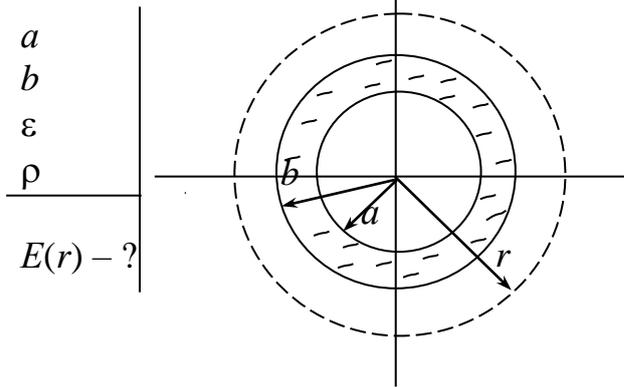


Рис. 2.5

В этой задаче, как и в предыдущей, электрическое поле обладает радиальной симметрией. Поэтому для решения воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса для электрического смещения (2.5). Разобьем все пространство на три области $r < a$, $a \leq r \leq b$, $r > b$. Для области, в которой нет заряда, получим:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi r^2 D = 0.$$

Откуда следует, что:

$$D = 0, \text{ при } r < a. \quad (1)$$

Во второй области имеется свободный заряд, и поток D не равен нулю. Величину заряда найдем, проинтегрировав по толщине dr тонкого сферического слоя, радиуса r :

$$\int_V \rho dV = \int \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho (r^3 - a^3) \quad (2)$$

Приравнивая заряд потоку D

$$q = 4\pi r^2 D, \quad (3)$$

найдем электрическое смещение, если $a \leq r \leq b$:

$$D = \frac{\rho}{3} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right). \quad (4)$$

Для третьей области заряд определится выражением

$$q = \frac{4}{3} \pi \rho (b^3 - a^3). \quad (5)$$

Приравнивая (3) и (5), находим D в области $r > b$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (6)$$

Напряженность поля найдем по формуле (2.4):

$$E = \begin{cases} 0, & r < a; \\ \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right), & a \leq r \leq b; \\ \frac{a}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > b. \end{cases}$$

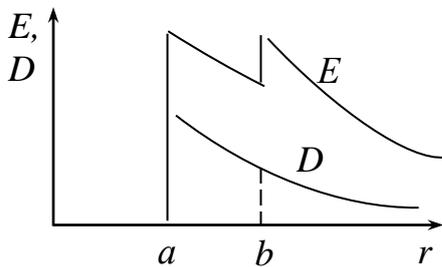


Рис. 2.6

Графики зависимости $E(r)$ и $D(r)$ приведены на рис. 2.6. Внутри сферического слоя поле отсутствует. При $r \geq a$ смещение изменяется непрерывно, а напряженность поля терпит разрыв при $r = b$, который обусловлен поверхностными связанными зарядами, как отмечалось в задаче 4.

Задача 6. Сначала напряженность поля между обкладками плоского конденсатора равна E_0 . Затем половину зазора, как показано на рис. 2.7, заполнили диэлектриком с проницаемостью ϵ . Найти напряженность поля и электрическое смещение в обеих частях зазора, если при введении диэлектрика напряжение на обкладках конденсатора не изменялось.

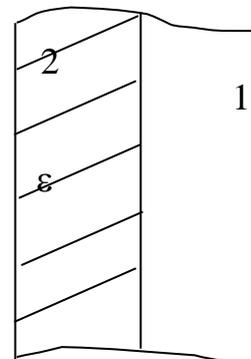


Рис. 2.7

Решение

E_0
 ε
 $E, D - ?$

Электрическое поле между обкладками конденсатора однородное, разное в диэлектрике и в вакууме. На поверхности диэлектрика выполняются граничные условия (2.8):

$$E_1 = \varepsilon E_2, \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют вакууму и диэлектрику (см. рис. 2.7).

Напряжение между обкладками конденсатора определяется интегралом

$$U = \int_0^d E dl = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2}, \quad (2)$$

где d – расстояние между обкладками, а интегрирование ведется вдоль перпендикуляра к обкладкам. В отсутствие диэлектрика

$$U = E_0 d. \quad (3)$$

Приравнявая (2) и (3) с учетом (1), найдем напряженность поля:

$$E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} E_0, \quad E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}. \quad (4)$$

Электрическое смещение определим по формуле (2.4):

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{1 + \varepsilon} E_0, \quad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{1 + \varepsilon} E_0.$$

Сравнивая D_1 и D_2 , видим, что они равны. Этот вывод соответствует граничному условию (2.8) для нормальной составляющей D .

Задача 7. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл равномерно распределен по объему шара радиуса $R = 1$ см, сделанного из однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Определить: а) энергию W поля, связанного с шаром; б) энергию W_1 , заключенную внутри шара; в) энергию W_2 , заключенную в окружающем шар пространстве.

$$\begin{array}{l} q = 10^{-10} \text{ Кл} \\ R = 1 \text{ см} \\ \varepsilon = 2 \\ \hline W, W_1, W_2 - ? \end{array}$$

Решение

Объемная плотность энергии электрического поля определяется выражением (2.21):

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}, \quad (1)$$

а вся энергия находится интегрированием по объему:

$$W = \int_V w dV. \quad (2)$$

Используя результаты решения задачи 4, для E имеем:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}, & r \leq R; \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (3)$$

Для D имеем:

$$D = \begin{cases} \frac{\rho r}{3}, & r \leq R; \\ \frac{q}{4\pi r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь ρ – объемная плотность заряда, которая связана с зарядом шара выражением

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}. \quad (5)$$

Учитывая симметрию задачи, интегрирование в (2) проще всего проводить по толщине шарового слоя dr , объем которого $dV = 4\pi r^2 dr$. Подставляя (3) и (4) в (1) и (2), и проводя интегрирование, находим энергию электрического поля внутри

$$W_1 = \int_0^R \frac{\rho^2 r^2}{18\epsilon\epsilon_0} 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\epsilon\epsilon_0} = \frac{q^2}{40\pi\epsilon\epsilon_0 R} = 0,45 \text{ нДж}$$

и снаружи шара

$$W_2 = \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 4,5 \text{ нДж.}$$

Энергия поля, связанного с шаром, равна сумме энергий W_1 и W_2 :

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{5\epsilon} + 1 \right) = 4,95 \text{ нДж.}$$

Задача 8. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектрическими слоями толщиной d_1 и d_2 с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Площадь каждой обкладки равна S . Найти емкость конденсатора.

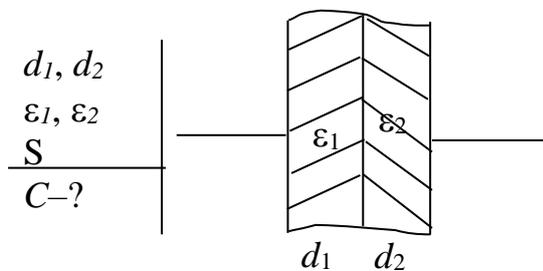


Рис. 2.8

Решение

Представим данный конденсатор как два последовательно соединенных конденсатора с емкостями C_1 и C_2 (рис. 2.8). При последовательном соединении складываются величины, обратные емкости (2.19):

(1)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1)$$

Каждый из конденсаторов C_1 и C_2 можно считать плоским и определять емкость по формуле (2.17):

$$C_1 = \frac{\epsilon_1\epsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_2\epsilon_0 S}{d_2}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим емкость конденсатора:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}.$$

Задача 9. Найти емкость бесконечной цепи, которая образована повторением одного и того же звена, состоящего из двух одинаковых конденсаторов, каждый емкости C (рис. 2.9).

Решение

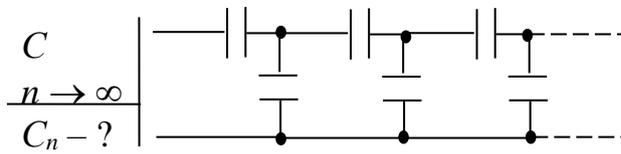


Рис. 2.9

Рассмотрим сначала одно первое звено цепи, состоящее из двух последовательно соединенных конденсаторов. Емкость этого звена найдем по формуле (2.19):

$$C_1 = \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Добавим еще одно звено и найдем емкость батареи из двух звеньев:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_1}. \quad (2)$$

Для батареи из n звеньев получим рекуррентное соотношение:

$$\frac{1}{C_n} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{n-1}}. \quad (3)$$

Учитывая, что все члены в (3) положительные, получаем после отбрасывания второго слагаемого неравенство $\frac{1}{C_n} > \frac{1}{C}$, которое дает оценку емкости батареи:

$$\frac{C}{2} \leq C_n \leq C. \quad (4)$$

Обозначим емкость всей батареи C_{δ} и учтем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_{\delta}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1} = C_{\delta}$, поскольку емкость бесконечной цепочки не меняется при добавлении или исключении одного звена. Тогда, выполнив в соотношении (3) предельный переход, перепишем его для всей цепочки в виде:

$$\frac{1}{C_{\delta}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{\delta}}.$$

После преобразований получаем квадратное уравнение относительно C_{δ} :

$$C_{\delta}^2 + C \cdot C_{\delta} - C^2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим емкость бесконечной батареи конденсаторов:

$$C_{\delta} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} C \approx 0,62C.$$

Второй корень уравнения отрицательный и не имеет физического смысла.

Задача 10. Определить работу A , которую нужно совершить, чтобы увеличить на $\Delta x = 0,2$ мм расстояние x между пластинами плоского конденсатора, заряженными разноименными зарядами величины $q = 0,2$ мкКл. Площадь обкладок $S = 400$ см², между обкладками воздух.

Решение

$\Delta x = 0,2$ мм $q = 0,2$ мкКл $S = 400$ см ² $\varepsilon_0 = 1$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $A = ?$	<p>Для решения задачи воспользуемся законом изменения энергии системы:</p> $\Delta W = A. \tag{1}$ <p>Энергия конденсатора определяется выражением (2.18):</p>
--	--

$$W = \frac{q^2}{2C}. \tag{2}$$

Емкость плоского конденсатора рассчитаем по формуле (2.17):

$$C_1 = \frac{\varepsilon_g \varepsilon_0 S}{x}. \quad (3)$$

После смещения обкладок емкость конденсатора будет:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_g \varepsilon_0 S}{x + \Delta x}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2) и (1), получим затраченную работу:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q^2 \Delta x}{2\varepsilon_g \varepsilon_0 S} = 11,3 \text{ мкДж}.$$

Задача 11. Два длинных круглых провода с одинаковыми радиусами a расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями равно b . Найти взаимную емкость проводов на единицу их длины при условии $b \gg a$.

Решение

a, b $b \gg a$ $C_1 - ?$	Выделим участок двухпроводной линии длиной Δl . По определению, емкость этого участка:
----------------------------------	--

$$\Delta C = \frac{\Delta q}{U} = \frac{\lambda \Delta l}{U}, \quad (1)$$

где Δq – заряд, U – разность потенциалов проводников, λ – линейная плотность зарядов. Из (1) для емкости единицы длины линии получаем:

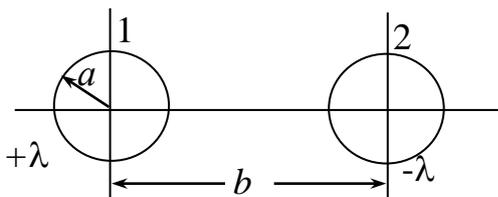


Рис. 2.10

$$C_1 = \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (2)$$

Пусть проводники заряжены так, как изображено на рис. 2.10. Распределение зарядов по поверхности проводников в

общем случае неравномерное потому, что каждый из проводников находится в электрическом поле другого. При больших расстояниях между проводниками, по сравнению с их размерами ($b \gg a$), влиянием второго проводника на распределение зарядов по поверхности первого можно пренебречь, что существенно упрощает решение задачи. Согласно принципу суперпозиции, потенциал φ_1 поверхности первого проводника определяется зарядами как 1, так и 2 проводников:

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_2'. \quad (3)$$

Здесь φ_1' – потенциал поверхности проводника 1, создаваемого зарядами этого проводника; φ_2' – потенциал поля, создаваемого проводником 2 на поверхности проводника 1.

Зависимость φ_2 для цилиндрического проводника проще всего найти через напряженность поля E , которую определим по теореме Остроградского–Гаусса. Для цилиндрической поверхности единичной длины по теореме Гаусса имеем:

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0},$$

откуда:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}. \quad (4)$$

Потенциал φ найдем интегрированием:

$$\varphi = -\int E dr = -\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln r + A, \quad (5)$$

где A – постоянная интегрирования, которая уйдет при вычислении разности потенциалов.

Подставляя (5) в (3) и учитывая, что $r_1' = a$, $r_2' = b - a|_{b \gg a} \approx b$, а знаки зарядов противоположны, получим:

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (6)$$

Аналогично для потенциала φ_2 поверхности второго проводника найдем:

$$\varphi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Подставляя φ_1 и φ_2 в выражение (2), определим емкость линии:

$$C_1 = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln b/a}.$$

Задачи для контроля

1. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ электрическое смещение равно \vec{D} . Чему равна поляризованность \vec{P} в этой точке?

2. Определить плотность связанных зарядов на поверхности пластинки из слюды толщиной $d = 0.2$ мм, служащей изолятором в плоском конденсаторе, заряженном до напряжения $U = 400$ В. Относительная диэлектрическая проницаемость слюды $\epsilon = 7$.

3. Найти емкость системы из двух одинаковых металлических шариков радиуса a , расстояние между центрами которых b , причем $b \gg a$.

4. Конденсатор емкостью C_1 , предварительно заряженный до напряжения U , подключили параллельно к незаряженному конденсатору емкости C_2 . Найти приращение электрической энергии этой системы к моменту установления равновесия. Объяснить полученный результат.

5. Пространство между обкладками плоского конденсатора емкостью C заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью ε . Какую работу надо совершить, чтобы удалить диэлектрик? Заряд конденсатора q остается постоянным.

6. Имеется заряженный плоский конденсатор. Зазор между обкладками конденсатора заполняется диэлектриком с проницаемостью ε . Что происходит при этом с плотностью энергии w поля в зазоре, если конденсатор:

- а) соединен с источником напряжения;
- б) отключен от источника напряжения?

7. Пространство между пластинами плоского конденсатора емкостью C до половины заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью ε , как указано на рис. 2.11. Определить емкость конденсатора после удаления диэлектрика.

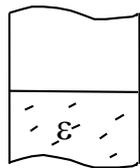


Рис. 2.11

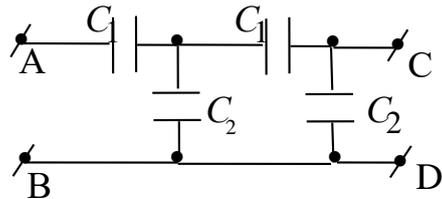


Рис. 2.12

8. В схеме, изображенной на рис. 2.12, напряжение между точками А и В равно U_0 , отношение емкостей $C_2/C_1 = n$. Найти напряжение между точками С и D.

Задачи для самостоятельного решения

1. В однородное электрическое поле с напряженностью $E_0 = 100$ В/м помещена перпендикулярно полю бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Определить:

- а) напряженность поля E и электрическое смещение D внутри пластины;
- б) поляризованность диэлектрика P ;
- в) поверхностную плотность связанных зарядов σ' .

Ответ: $E = 50$ В/м; $D = 0,885$ нКл/м²; $P = 0,44$ нКл/м;

$$\sigma' = \pm 0,44 \text{ нКл/м}^2.$$

2. Бесконечная пластина толщиной a из изотропного диэлектрика помещена перпендикулярно в однородное внешнее электрическое поле с напряженностью \vec{A}_0 . Диэлектрическая проницаемость пластины изменяется линейно вдоль направления \vec{A}_0 от значения ε_1 до ε_2 . Вне пластины $\varepsilon = 1$. Найти объемную плотность связанных зарядов ρ' внутри пластины как функцию расстояния x от ее границы.

$$\text{Ответ: } \rho' = -\frac{\varepsilon_0 E_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a} x \right)}.$$

3. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2 , причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S , расстояние между ними d . Найти:

а) емкость конденсатора;

б) объемную плотность связанных зарядов, как функцию ε , если заряд конденсатора и поле \vec{A} в нем направлено в сторону возрастания ε .

$$\text{Ответ: а) } C = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{d \cdot \ln \varepsilon_2 / \varepsilon_1}; \quad \text{б) } \rho' = -\frac{q (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \cdot S \cdot \varepsilon^2}.$$

4. У поверхности фарфора напряженность поля в воздухе $E_0 = 200$ В/см. Направление поля образует с нормалью к поверхности угол $\alpha = 40^\circ$. Определить: а) угол α_1 между направлениями поля и нормалью в фарфоре; б) напряженность поля E_1 в фарфоре; в) поверхностную плотность σ' связанных зарядов. Относительная диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon = 6$.

$$\text{Ответ: } \alpha_1 = 79^\circ, E_1 = 130 \text{ В/см}; \quad \sigma' = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2.$$

5. Найти емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и $R_2 > R_1$, который заполнен диэлектриком с проницаемостью ε . Исследовать случай, когда зазор между обкладками d намного меньше их радиуса: $(R_1 - R_2) \ll R_1$.

$$\text{Ответ: } C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \approx \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1^2}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

6. Пренебрегая рассеиванием поля вблизи краев обкладок, найти емкость цилиндрического конденсатора. Радиусы обкладок R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), их длина l . Зазор между обкладками заполнен диэлектриком с проницаемостью ε .

$$\text{Ответ: } C_u = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

7. Напряжение между обкладками плоского конденсатора емкостью C равно U . Какую работу надо совершить, чтобы заполнить пространство между обкладками однородным диэлектриком с проницаемостью ε . Напряжение на конденсаторе остается постоянным.

$$\text{Ответ: } A = \frac{CU^2}{2}(\varepsilon - 1).$$

8. Найти емкость бесконечной цепи, которая образована повторением одного и того же звена, состоящего из конденсаторов емкостью C_1 и C_2 (рис. 2.13).

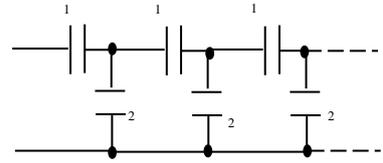


Рис. 2.13

$$\text{Ответ: } C_b = \frac{\sqrt{C_2^2 + 4C_1C_2} - C_2}{2}.$$

9. Напряженность поля между обкладками плоского конденсатора E_0 . Половину зазора параллельно обкладкам заполнили однородным диэлектриком с проницаемостью ε так, что напряжение при этом на конденсаторе не изменилось. Найти напряженность поля и электрическое смещение в обеих частях зазора.

$$\text{Ответ: } E_1 = E_0, E_2 = E_0/\varepsilon, D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0.$$

III. Постоянный электрический ток

§ 15. Электрический ток

В веществах, называемых проводниками, имеются заряженные частицы, которые способны почти свободно передвигаться. В состоянии термодинамического равновесия они участвуют в тепловом хаотическом движении, т. е. все направления движения частиц равновероятны и суммарный заряд, переносимый через любое поперечное сечение проводника, равен нулю. Если через некоторую поверхность переносится суммарный заряд, отличный от нуля, говорят, что через эту поверхность течет электрический ток. Ток может течь в различных средах: твердых телах, жидкостях и газах.

Наличие в данном теле заряженных частиц, которые могут перемещаться в пределах всего тела, необходимо для протекания тока, они называются носителями тока. (Это электроны, ионы, любые заряженные частицы).

Ток возникает при условии, что внутри тела существует электрическое поле. В отсутствие поля носители заряда участвуют в тепловом движении, однако $\langle \vec{v} \rangle = 0$. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение со скоростью \vec{u} . Истинная скорость частицы равна $\vec{v} + \vec{u}$. Поскольку наблюдаемые значения связаны со средними значениями микроскопических величин, усредним полученное выражение с учетом того, что $\langle \vec{v} \rangle = 0$. Тогда получим:

$$\langle \vec{v} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle.$$

Таким образом, электрический ток можно определить как упорядоченное движение электрических зарядов.

Для количественной характеристики электрического тока используют величину заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Ее называют силой тока. Сила тока есть поток заряда через поверхность.

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то:

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \left| \frac{dq^-}{dt} \right|.$$

За направление тока принимают направление, в котором движутся положительные заряды.

Для более детальной характеристики тока вводят плотность тока – это заряд, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к току:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Тогда:

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}).$$

Плотность тока является вектором. За направление вектора плотности тока \vec{j} условились принимать направление скорости движения положительных зарядов \vec{u}^+ . Из последнего соотношения видно, что сила тока, текущего через некоторую площадь S , равна потоку вектора плотности тока через эту поверхность.

Плотность тока равна плотности потока заряда. Поступая так же, как в молекулярной физике при вычислении плотности, например, потока тепла, для плотности тока, в случае наличия положительно и отрицательно заряженных носителей тока, можно получить выражение:

$$j = e^+ n^+ u^+ + |e^-| n^- u^-.$$

Здесь e^+ и e^- – величины зарядов положительных и отрицательных носителей, n^+ и n^- – их концентрации соответственно. Или в векторной форме:

$$\vec{j} = e^+ n^+ \vec{u}^+ + e^- n^- \vec{u}^-.$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным.

$$I = \frac{q}{t}.$$

Единица силы тока – ампер – основная единица в системе СИ. 1 кулон – это заряд, переносимый за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока в 1 А.

Если взять замкнутую поверхность, то полный ток, текущий через эту поверхность, можно записать в виде:

$$\oint_S \bar{j} d\bar{S} = -\frac{dq}{dt},$$

где $-dq/dt$ – убыль заряда внутри замкнутой поверхности.

Преобразуем это выражение. Заряд внутри поверхности есть:

$$q = \int_V \rho dV,$$

где ρ – объемная плотность заряда. Тогда:

$$\oint_S \bar{j} d\bar{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

По теореме Остроградского–Гаусса $\oint_S \bar{a} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{a} dV$,

$$\oint_S \bar{j} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

откуда, в силу произвольности выбранного объема, получим:

$$\text{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Это уравнение называется уравнением непрерывности. Оно выражает закон сохранения заряда. Т. е. в точках, которые являются источниками

вектора плотности тока \vec{j} , происходит убывание заряда. В случае стационарного тока:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

т. е. в случае постоянного тока вектор \vec{j} не имеет источников. Это значит, что линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, т. е. линии постоянного тока всегда замкнуты.

§ 16. Электродвижущая сила

Если по проводнику протекает электрический ток, то значит в проводнике существует электрическое поле, для постоянного тока это поле должно быть стационарным. Для поддержания тока достаточно длительное время нужно от конца проводника с меньшим потенциалом (для положительных носителей) непрерывно отводить приносимые током заряды, а к концу с большим потенциалом непрерывно их подводить. Т. е. необходимо осуществить круговорот зарядов. Это согласуется с тем, что, как указано выше, линии постоянного тока должны быть замкнуты.

Таким образом, наряду с участками, где положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала φ , должны иметься участки, где они будут двигаться в противоположную сторону, против сил электростатического поля, значит на этих участках должны действовать силы неэлектростатического происхождения, называемые сторонними силами. Они могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ, электрическими полями, порождаемыми меняющимися во времени магнитными полями.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется электродвижущей силой э. д. с. \mathcal{E} , действующей в цепи или на ее участке.

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q},$$

Размерность электродвижущей силы \mathcal{E} совпадает с размерностью потенциала электрического поля φ .

Стороннюю силу можно представить в виде:

$$\bar{F}_{\text{ст}} = \bar{E}^* q,$$

где \bar{E}^* – напряженность поля сторонних сил.

Работа сторонних сил при перемещении заряда из точки 1 в точку 2 есть:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \bar{F}_{\text{ст}} d\bar{l} = q \int_{(1)}^{(2)} \bar{E}^* d\bar{l},$$

откуда:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \bar{E}^* d\bar{l}.$$

Для э. д. с. \mathcal{E} в замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \bar{E}^* d\bar{l} -$$

электродвижущая сила, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

При наличии электростатического поля полная сила, действующая на заряд, запишется в виде:

$$\bar{F} = \bar{F}_E + \bar{F}_{\text{ст}} = q(\bar{E} + \bar{E}^*),$$

на участке 1–2:

$$A_{12} = q \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} + q \int_1^2 \bar{E}^* d\bar{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q \mathcal{E}_{12}.$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда,

называется падением напряжения или просто напряжением U на данном участке цепи.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Участок цепи, где не действуют сторонние силы, называется однородным. В противном случае он называется неоднородным. Для однородного участка:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

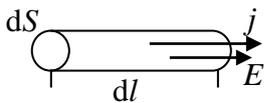
т. е., напряжение на однородном участке цепи совпадает с разностью потенциалов на концах этого участка.

§ 17. Закон Ома. Сопротивление проводников

На основании экспериментальных исследований зависимости между током и напряжением, Ом установил закон: сила тока, текущего по однородному проводнику, пропорциональна падению напряжения U на проводнике:

$$I = \frac{1}{R}U, \quad (U = \varphi_1 - \varphi_2).$$

Сопротивление $R = \rho \frac{l}{S}$ Ом, где l – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения (изотропный проводник), ρ – удельное сопротивление проводника, т. е. сопротивление проводника длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1 м². Удельное сопротивление зависит от материала и температуры проводника. Рассмотрим бесконечно малый элемент проводника длиной dl и площадью поперечного сечения dS . Плотность тока в нем будет совпадать по направлению с вектором напряженности электрического поля. Тогда легко получить следующее соотношение:



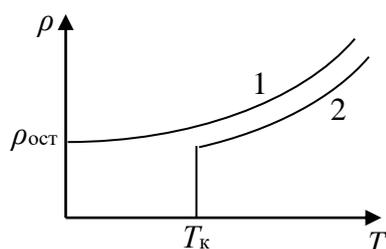
$$I = j \cdot dS = \frac{1}{R}U = \frac{dS}{\rho dl} Edl,$$

откуда:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

Последнее соотношение называется законом Ома в дифференциальной форме. Величина σ , обратная удельному сопротивлению, называется проводимостью проводника.

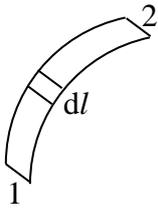
Зависимость удельного сопротивления от температуры в области комнатных температур пропорциональна температуре $\rho \sim T$, в области



низких температур она носит более сложный характер. При стремлении температуры к абсолютному нулю сопротивление стремится к некоторой конечной величине, называемой остаточным сопротивлением $\rho_{ост}$. Однако такое поведение наблюдается не для всех материалов.

В 1911 г. Камерлинг–Оннес, который в 1908 г. получил жидкий гелий, исследуя температурную зависимость удельного сопротивления ртути, открыл явление, которое получило название сверхпроводимости. Явление состоит в том, что при определенной температуре, которая называется критической — T_k , сопротивление проводника скачком обращается в нуль. Для ртути $T_k = 4,2$ К. Явление сверхпроводимости имеет довольно сложную природу и не может быть объяснено в рамках классической физики. Характерной особенностью сверхпроводящего состояния, кроме отсутствия сопротивления протеканию тока, является вытеснение магнитного поля из объема сверхпроводника — эффект Мейснера–Оксенфельда. Этот эффект имеет место в ограниченной области магнитных полей. Если напряженность внешнего магнитного поля превышает некоторое значение, называемое критическим, сверхпроводящее состояние разрушается. Основы теории сверхпроводимости были созданы Бардином, Купером и Шриффером. Она получила название — теория БКШ, по первым буквам фамилий авторов.

§ 18. Закон Ома для неоднородного участка цепи



Рассмотрим бесконечно малый элемент dl неоднородного участка цепи, площадь поперечного сечения которого S , закон Ома в дифференциальной форме запишется в виде:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

В проекции на направление dl получим:

$$j_l = \sigma(E_l + E_l^*).$$

Подставляя плотность тока через силу тока и площадь поперечного сечения и умножая обе части равенства на dl :

$$I \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^* | \times dl,$$

после интегрирования по всей длине выделенного участка цепи:

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = \int_1^2 E_l dl + \int_1^2 E_l^* dl,$$

окончательно получим:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где R – полное сопротивление цепи.

§ 19. Правила Кирхгофа

Для расчета разветвленных цепей используются простые правила, которые были сформулированы Кирхгофом. Этих правил два.

1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_i = 0.$$

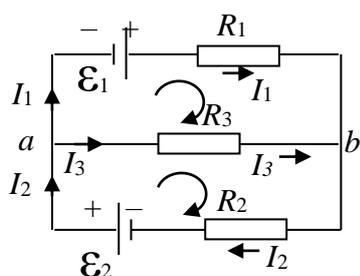
Узлом цепи называется точка, в которой сходятся три и более проводника. Ток, втекающий в узел, считается положительным, вытекающий – отрицательным.

2. Алгебраическая сумма падений напряжений в замкнутом контуре равна алгебраической сумме э. д. с., действующих в контуре.

$$\sum I_i R_i = \mathcal{E}_i.$$

При составлении уравнений по второму правилу Кирхгофа произвольным образом выбирают направление обхода контура – произвольного замкнутого участка цепи. Ток считается положительным, если его направление совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным в противном случае.

Э. д. с. считается положительной, если при обходе контура внутри источника двигаться от отрицательного полюса «–» к положительному – «+».



В качестве примера рассмотрим цепь, показанную на рисунке. Будем считать, что сопротивления и э. д. с. заданы. Направления обхода каждого из контуров показаны стрелками. Пусть необходимо найти напряжение на резисторе R_3 :

$$U_3 = \varphi_a - \varphi_b = I_3 R_3.$$

Воспользуемся первым правилом Кирхгофа для узла a (заметим, что применение этого же правила для узла b даст, с точностью до знака, то же самое уравнение) и вторым правилом для выбранных контуров. В результате получим систему линейных уравнений для токов:

$$\left. \begin{aligned} I_2 - I_1 - I_3 &= 0 \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 &= \mathcal{E}_1 \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 &= \mathcal{E}_2 \end{aligned} \right\}.$$

Отсюда находим I_3 :

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_2 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}.$$

Подставляя найденное значение тока в выражение для напряжения, окончательно получим:

$$U_3 = \varphi_a - \varphi_b = \frac{(\varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_2 R_2) R_3}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}.$$

Полученная на основе правил Кирхгофа система позволяет рассчитать токи, текущие во всех участках цепи.

§ 20. Мощность тока

Пусть имеется произвольный участок цепи постоянного тока, напряжение на концах которого U . За время t через поперечное сечение проводника переносится заряд $q = It$ (здесь учтено, что ток постоянный). При этом силы электростатического поля и сторонние силы совершают работу:

$$A = Uq = UIt.$$

Тогда мощность, выделяемая в рассматриваемом участке цепи, есть:

$$P = \frac{A}{t} = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I.$$

Эта мощность расходуется на совершение рассматриваемым участком цепи работы над внешними телами, на нагревание данного участка цепи, на протекание химических реакций.

Найдем удельную мощность, т. е. мощность, выделяемую в единице объема проводника. Пусть в произвольном объеме проводника ΔV выделяется мощность ΔP , тогда:

$$P_{\text{уд}} = \frac{\Delta P}{\Delta V}.$$

При движении одного носителя заряда действующие на него силы со стороны электростатического поля и сторонние силы развивают мощность:

$$P' = \bar{F}\bar{V} = e(\bar{E} + \bar{E}^*)(\bar{v} + \bar{u}).$$

Усреднив, найдем мощность, выделяемую при движении одного носителя:

$$\langle P' \rangle = e(\bar{E} + \bar{E}^*)(\bar{u}).$$

Умножая на число носителей в рассматриваемом объеме, найдем выделяемую в нем мощность:

$$\Delta P = \langle P' \rangle n \Delta V = e(\bar{E} + \bar{E}^*)(\bar{u}) n \Delta V = \bar{j}(\bar{E} + \bar{E}^*) \Delta V.$$

Разделив на объем, окончательно получим:

$$P_{\text{уд}} = \bar{j}(\bar{E} + \bar{E}^*).$$

Это выражение определяет мощность, выделяемую в единице объема проводника, по которому течет постоянный ток.

§ 21. Закон Джоуля–Ленца

Рассмотрим случай, когда проводник, по которому течет ток, неподвижен, и химических превращений в нем не происходит, тогда работа тока будет затрачиваться на увеличение внутренней энергии проводника, в результате проводник будет нагреваться. В этом случае говорят, что при протекании тока в проводнике выделяется некоторое количество теплоты:

$$Q = IUt.$$

Учитывая, что $U = RI$, получим формулу:

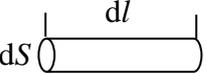
$$Q = I^2 Rt.$$

Это соотношение было установлено экспериментально Джоулем и независимо Ленцем и носит название закона Джоуля–Ленца.

Если сила тока меняется со временем, то выделяющееся количество теплоты можно найти интегрированием:

$$Q = \int_0^t RI^2 dt.$$

От интегральной формы закона, характеризующего количество теплоты, выделяющееся во всем объеме, можно перейти к выражению, характеризующему выделение тепла в различных местах проводника.

Выделив бесконечно малый цилиндрический объем, dS  получим, что за время dt в нем выделится:

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dS dl dt \times \frac{1}{dV dt}.$$

Разделив полученное выражение на объем и время, окончательно получим:

$$Q_{уд} = \rho j^2.$$

Эта величина характеризует количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единице объема, поэтому $Q_{уд}$ называется удельной тепловой мощностью тока. Последнее выражение называется законом Джоуля–Ленца в дифференциальной форме. Учитывая, что $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$, его можно переписать в виде:

$$Q_{уд} = \sigma E^2 = \vec{j} \vec{E}.$$

Джоуль и Ленц установили закон для однородного участка цепи, однако в выкладках мы нигде не делали этого предположения, следовательно, закон справедлив как для однородного, так и для неоднородного участка цепи.

Сводка основных формул и задачи к разделу III

Электрический ток, возникающий в проводящих средах в результате упорядоченного движения свободных зарядов под действием электрического поля, называется током проводимости (например, ток в металлах, полупроводниках, электролитах – это упорядоченное движение свободных электронов или ионов).

За направление тока принято считать направление упорядоченного движения положительных зарядов.

Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.1)$$

где dq – заряд, переносимый через поверхность (например, поперечное сечение проводника) за малый промежуток времени dt .

Для постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (3.2)$$

где q – весь заряд, перенесенный за промежуток времени от 0 до t .

Вектор плотности потока \vec{j} численно равен:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (3.3)$$

где dI – сила тока через малый элемент поверхности dS_{\perp} , нормальный к направлению движения носителей заряда.

Направление вектора \vec{j} совпадает с направлением скорости положительных носителей заряда. Так, в металлах этот вектор направлен противоположно вектору скорости свободных электронов, а по величине равен:

$$j = env, \quad (3.4)$$

где $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона (по абсолютной величине),
 n – концентрация, u – средняя скорость упорядоченного движения электронов.

Придавая векторный смысл элементу поверхности $d\vec{S}$, из (3.3) получим:

$$I = \int_{(S)} (\vec{j} \cdot d\vec{S}), \quad (3.5)$$

т. е. скаляр I является потоком вектора \vec{j} через поверхность S .

Постоянный ток поддерживается благодаря включению в цепь источников тока. В них неэлектростатические – сторонние – силы разделяют разноименные заряды и обеспечивают разность потенциалов на концах проводника. Источник характеризуется электродвижущей силой (э. д. с.):

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{12}^{стор}}{q}, \quad A_{12}^{стор} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}^{стор} \cdot d\vec{l}). \quad (3.6)$$

Здесь $A_{12}^{стор}$ – работа сторонней силы $\vec{F}^{стор}$ по перемещению заряда q на участке 1–2.

Закон Ома для участка цепи, в который включен источник (такой участок называют неоднородным):

$$U_{12} = IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (3.7)$$

$\varepsilon_{12} > 0$, если участок 1–2 проходится внутри источника от отрицательного полюса к положительному. В противном случае $\varepsilon_{12} < 0$. Величину U_{12} называют падением напряжения на участке. R – сопротивление, которое для проводников цилиндрической формы длины l с площадью поперечного сечения S рассчитывается по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.8)$$

где ρ – удельное сопротивление материала.

Для участка цепи, не содержащего источников (однородного) из (3.7), положив $\varepsilon_{12} = 0$, получим:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.9)$$

В дифференциальной форме закон Ома для однородного участка цепи связывает плотность тока с вектором напряженности электрического поля \vec{E} :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3.10)$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная проводимость материала.

Количество теплоты δQ , выделяемое в проводнике с сопротивлением R при прохождении по нему тока I за малый промежуток времени dt , в соответствии с законом Джоуля–Ленца, равно:

$$\delta Q = I^2 R dt. \quad (3.11)$$

Тепло, выделенное за промежуток времени от 0 до τ :

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt. \quad (3.12)$$

Этот же закон в дифференциальной форме позволяет рассчитать удельную тепловую мощность тока (т. е. количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единичном объеме):

$$Q_{y\delta} = \rho j^2. \quad (3.13)$$

В разветвленных цепях сопротивление участка, не содержащего источников тока, рассчитывают по следующим формулам:

1) при последовательном соединении:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k, \quad (3.14)$$

2) при параллельном соединении:

$$R = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}. \quad (3.15)$$

Для расчета произвольной разветвленной цепи пользуются правилами Кирхгофа.

Первое (правило узлов): алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0, \quad (3.16)$$

где m – число проводников, сходящихся в узле ($m > 2$). $I_k > 0$ для тока, втекающего в узел, $I_k < 0$ – для вытекающего тока.

Второе (правило контуров): алгебраическая сумма падений напряжений в произвольном контуре, выделенном в разветвленной цепи, равна алгебраической сумме э. д. с., действующих в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^{m_1} I_k R_k = \sum_{k=1}^{m_1} \varepsilon_k, \quad (3.17)$$

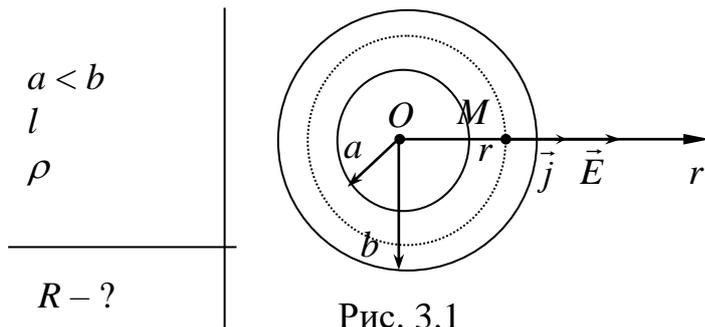
где m_1 – число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами.

Положительными считаются токи, направление которых совпадает с направлением обхода контура. Знак э. д. с. определяется, как указано ранее.

Примеры решения задач

Задача 1. Однородная слабо проводящая среда с удельным сопротивлением ρ заполняет пространство между двумя коаксиальными идеально проводящими тонкими цилиндрами. Радиусы цилиндров a и b , причем $a < b$, длина каждого цилиндра l . Пренебрегая краевыми эффектами, найти сопротивление среды между цилиндрами.

Решение



Предложенная конструкция идеально проводит ток в осевом направлении, но оказывает сопротивление току, текущему радиально, от внутреннего к внешнему цилиндру. На рис. 3.1 изображено сечение, перпендикулярное

оси цилиндров O , и проведена другая, перпендикулярная первой, ось Or . Система имеет цилиндрическую симметрию, поэтому, пренебрегая краевыми эффектами, можно утверждать, что взятые в произвольной точке M векторы напряженности \vec{E} и плотности тока \vec{j} направлены вдоль оси Or , а их модули зависят только от радиальной координаты r этой точки.

Чтобы получить зависимость $j(r)$, проведем через точку M цилиндрическую поверхность и запишем выражение для силы тока I , текущего через нее. Согласно (3.5), сила тока – это поток вектора \vec{j} , в данном случае равный:

$$I = 2\pi r l j. \quad (1)$$

В стационарной задаче сила тока не зависит от r , иначе заряд, покинувший внутренний цилиндр (радиуса a) не был бы равен заряду, попавшему на внешний (радиуса b). Т. е. $I \neq I(r)$, $I = \text{const}$. Тогда из (1) получим:

$$j = \frac{I}{2\pi l r}. \quad (2)$$

По закону Ома, в дифференциальной форме (3.10):

$$E = \rho j = \frac{I\rho}{2\pi lr}. \quad (3)$$

Так как $\vec{E} = -grad\varphi$, в случае цилиндрической симметрии: $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$, для потенциала φ , используя (3), получим дифференциальное уравнение:

$$d\varphi = -\frac{\rho I}{2\pi lr} dr. \quad (4)$$

Интегрирование его дает:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = -\frac{\rho I}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}, \quad (5)$$

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\rho}{2\pi l} I \ln \frac{b}{a}. \quad (6)$$

По закону Ома, $U = RI$, следовательно, сопротивление данной системы:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Второй способ решения. В данной задаче ток течет радиально. Выделим цилиндрический слой радиусом r и толщиной dr . Площадь поверхности этого слоя, через которую течет ток, равна $2\pi rl$. Сопротивление слоя определим по формуле:

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi rl}. \quad (8)$$

Сопротивление среды между цилиндрами определим как сопротивление последовательно соединенных слоев интегрированием:

$$R = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi l} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}, \quad (9)$$

что, естественно, совпадает с результатом, полученным выше (7).

Задача 2. При каком сопротивлении x в цепочке сопротивление между точками А и В не зависит от числа ячеек?

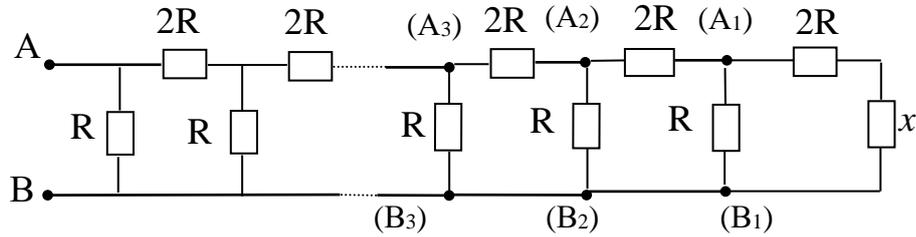


Рис. 3.2

Решение

Укажем на схеме пары точек (A_n, B_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$. Они соответствуют граничной паре точек (A, B) при участии в схеме n ячеек. Обозначим соответствующее сопротивление цепочки R_n . Поскольку между точками A_n и B_n всегда две параллельные ветви, для R_n при $n = 1, 2, 3 \dots$ справедливо:

$$\frac{R_n = R_{n-1}}{x - ?}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + x},$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_1}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_2},$$

...

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_{n-1}}.$$

Независимость сопротивления цепи от числа ячеек обозначает, что:

$$R_n = R_{n-1} = R_{n-2} = \dots = R_2 = R_1, \quad (2)$$

или:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_{n-1}} = \frac{1}{R_{n-2}} = \dots = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}. \quad (3)$$

Рассматривая первые два уравнения системы (1), заметим, что $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$ только при

$$R_1 = x. \quad (4)$$

Тогда из первого уравнения следует:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + x}. \quad (5)$$

Пусть $x \neq 0$ (очевидно, что $R \neq 0$). Тогда уравнение (5) сводится к квадратному:

$$x^2 + 2Rx - 2R^2 = 0, \quad (6)$$

из двух решений которого:

$$x_{1,2} = (\pm\sqrt{3} - 1)R, \quad (7)$$

физический смысл имеет только положительное решение:

$$x_1 = (\sqrt{3} - 1)R. \quad (8)$$

Задача 3. К источнику постоянного тока с внутренним сопротивлением R_0 подключили три одинаковых сопротивления R , соединенных между собой, как показано на рис. 3.3. При каком значении R тепловая мощность,

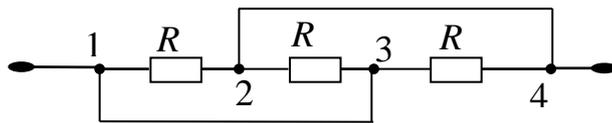


Рис. 3.3

выделяемая на этом участке, будет максимальна?

Решение

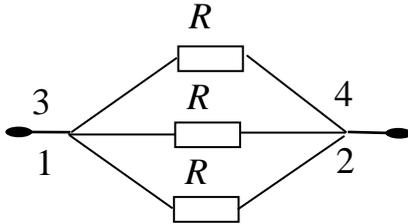
R_0	
$P \rightarrow \max$	
$R - ?$	

В схеме точки 1 и 3 замкнуты накоротко, поэтому их потенциалы равны:

$$\varphi_1 = \varphi_3. \quad (1)$$

Аналогично:

$$\varphi_2 = \varphi_4 \quad (2)$$



Тогда схему можно заменить на эквивалентную ей, объединив точки, потенциалы которых попарно равны.

Теперь видно, что участок представляет собой параллельное соединение трех проводников с сопротивлением R , и его сопротивление, согласно (3.15), равно:

$$R_{нар} = \frac{R}{3}. \quad (3)$$

При подключении участка к источнику с некоторой э. д. с. ε и внутренним сопротивлением R_0 по нему течет ток:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{нар} + R_0} = \frac{\varepsilon}{\frac{R}{3} + R_0}, \quad (4)$$

выделяя на участке тепловую мощность:

$$P = I^2 R_{нар} = \frac{\varepsilon^2 \frac{R}{3}}{\left(\frac{R}{3} + R_0\right)^2} = \frac{3\varepsilon^2 R}{(R + 3R_0)^2}. \quad (5)$$

Эта мощность максимальна, когда максимальна функция:

$$f(R) = \frac{R}{(R + 3R_0)^2} \rightarrow \max. \quad (6)$$

Дифференцируя ее и приравнявая нулю производную, получаем:

$$\frac{df}{dR} = \frac{(3R_0 - R)}{(R + 3R_0)^3} = 0, \quad (7)$$

откуда окончательно $R = 3R_0$.

Задача 4. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора С схемы, если $\varepsilon_1 = 4$ В, $\varepsilon_2 = 1$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 20$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Решение

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1 = 4\text{В} \\ \varepsilon_2 = 1\text{В} \\ R_1 = 10\text{ Ом} \\ R_2 = 30\text{ Ом} \\ R_3 = 20\text{ Ом} \\ \hline \varphi_A - \varphi_B = ? \end{array}$$

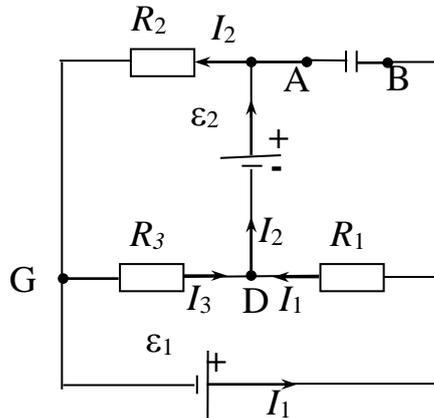


Рис. 3.4

В схеме три ветви с сопротивлениями R_1 , R_2 , R_3 . Через них текут токи I_1 , I_2 , I_3 соответственно, направления которых выберем произвольно. По участку АВ, содержащему конденсатор, ток не протекает. Точки А и В могут рассматриваться как концы других участков, например, ВD и DA. Применим к этим участкам закон

Ома (3.7), учитывая, что на ВD отсутствует источник э. д. с., а на DA нет падения напряжения из-за отсутствия сопротивления:

$$I_1 R_1 = \varphi_B - \varphi_D, \quad (1)$$

$$0 = \varphi_D - \varphi_A + \varepsilon_2.$$

Сложив эти уравнения, после преобразований получим:

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_2 - I_1 R_1. \quad (2)$$

Такой же результат получается из рассмотрения ADB как единого участка, для которого

$$-I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_2.$$

Задача сводится к нахождению тока I_1 .

Используем второе правило Кирхгофа (3.17) для контура, содержащего сопротивления R_2 и R_3 :

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2, \quad (3)$$

и для контура, содержащего R_1 и R_3 :

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 = \varepsilon_1. \quad (4)$$

Здесь оба контура обходятся против часовой стрелки. Для узла D, согласно первому правилу Кирхгофа, запишем:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (5)$$

Уравнения (3)–(5) запишем в виде системы:

$$\begin{cases} R_2 I_2 + R_3 I_3 = \varepsilon_2, \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = \varepsilon_1, \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что по второму правилу получаем на одно уравнение меньше, чем количество контуров в схеме (третий возможный контур – это объединение первых двух), а по первому – на одно меньше, чем количество узлов (в схеме есть также узел G). Рассмотрение всех контуров и узлов добавило бы уравнения, представляющие собой линейные комбинации уже записанных.

Решая систему (6) (например, по правилу Крамера), получаем:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \quad (7)$$

Подставляя числовые данные, рассчитаем ток I_1 :

$$I_1 = \frac{4 \cdot 50 + 20}{10 \cdot 30 + 30 \cdot 20 + 10 \cdot 20} = 0,2 \text{ (A)}.$$

Тогда, по формуле (2), окончательно получаем:

$$\varphi_A - \varphi_B = 1 - 0,2 \cdot 10 = -1 \text{ (В)}.$$

Таким образом, потенциал обкладки А конденсатора ниже, чем обкладки В. Она заряжена отрицательно.

Задача 5. Резистор с сопротивлением R и нелинейное сопротивление, вольт-амперная характеристика которого имеет вид $U = a\sqrt{I}$, где a – постоянная, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U_0 . Найти ток в цепи.

Решение

Предложенная электрическая цепь имеет вид, показанный на рис. 3.5.

R
$U = a\sqrt{I}$
$a = \text{const}$
U_0
$I - ?$

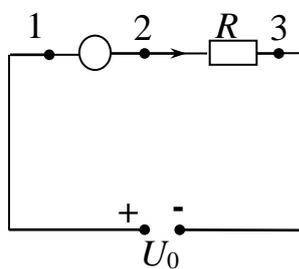


Рис. 3.5

Для обычного резистора (участок 2–3), который еще называют линейным сопротивлением, падение напряжения связано с током линейной зависимостью (законом Ома):

$$U_{23} = RI. \quad (1)$$

Для сопротивления нелинейного (участок 1–2) связь этих величин более сложная:

$$U_{12} = a\sqrt{I}, \quad a = \text{const}. \quad (2)$$

Благодаря последовательному подключению этих сопротивлений к источнику напряжения, можно записать:

$$U_0 = U_{12} + U_{23},$$

или

$$U_0 = a\sqrt{I} + RI. \quad (3)$$

Вводя обозначение:

$$\sqrt{I} = x, \quad (4)$$

из уравнения (3) после преобразований получаем:

$$x^2 + \frac{a}{R}x - \frac{U_0}{R} = 0. \quad (5)$$

Из двух корней данного квадратного уравнения условию (4) удовлетворяет только один – положительный корень:

$$x = \frac{a}{2R} \left[\sqrt{1 + \frac{4RU_0}{a^2}} - 1 \right]. \quad (6)$$

Следовательно, ток в цепи равен:

$$I = x^2 = \left(\frac{a}{2R} \right)^2 \left[\sqrt{1 + \frac{4RU_0}{a^2}} - 1 \right]^2. \quad (7)$$

Задача 6. Плоский конденсатор, заполненный диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2,1$, теряет за время $\tau = 3$ мин половину сообщенного ему заряда. Считая, что утечка заряда происходит только через диэлектрическую прокладку, найти ее удельное сопротивление.

Решение

$\varepsilon = 2,1$ $\tau = 180 \text{ с}$ $q(\tau) = \frac{1}{2} q(0)$ <hr style="width: 100%;"/> $\rho - ?$	<p>Из-за несовершенства заполняющего диэлектрика конденсатор теряет заряд, т. е. между его обкладками течет ток. Этот ток непостоянный (или нестационарный), но время, за которое он существенно изменяется, гораздо больше времени, необходимого для передачи информации об изменении каких-либо электрических величин в цепи (эта информация распространяется со скоростью света).</p>
--	--

Такие токи называют квазистационарными, для них также справедлив закон Ома (3.9):

$$U = IR. \quad (1)$$

Применительно к данной задаче, R – сопротивление среды между обкладками, равное:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2)$$

U – напряжение на конденсаторе, связанное с зарядом q положительной обкладки и емкостью C :

$$U = \frac{q}{C}, \quad (3)$$

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l}. \quad (4)$$

Здесь l – расстояние между обкладками, S – площадь обкладки. По определению тока:

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (5)$$

Минус взят потому, что заряд положительной обкладки убывает, а формулы (1) и (3) связывают положительные величины.

Подставляя в (1) выражения (2)–(5), получаем дифференциальное уравнение, описывающее изменение заряда конденсатора со временем:

$$q \frac{l}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = -\rho \frac{l}{S} \frac{dq}{dt}. \quad (6)$$

Преобразуем его к виду:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{\rho\varepsilon\varepsilon_0} dt \quad (7)$$

и, проинтегрировав в пределах $0 < t < \tau$, получим:

$$\ln \frac{q(\tau)}{q(0)} = -\frac{\tau}{\rho \epsilon \epsilon_0}. \quad (8)$$

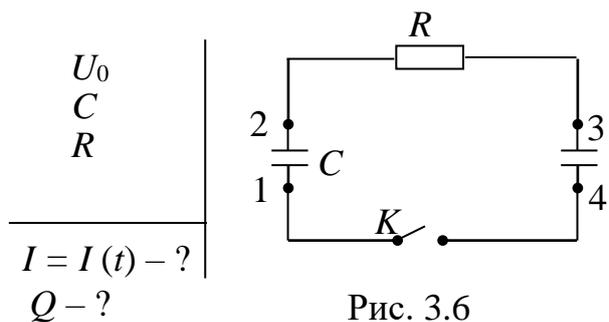
Отсюда:

$$\rho = \frac{\tau}{\left(\epsilon \epsilon_0 \ln \frac{q(0)}{q(\tau)} \right)} = \frac{\tau}{\epsilon \epsilon_0 \ln 2}. \quad (9)$$

Подстановка числовых значений дает $\rho = 1,4 \cdot 10^{13}$ Ом·м.

Как видим, величина достаточно велика, но конечна. Для идеального изолятора было бы $\rho \rightarrow \infty$, и характерное время разрядки $\tau \rightarrow \infty$.

Задача 7. В схеме, показанной на рисунке, емкости обоих конденсаторов равны C , сопротивление равно R . Один из конденсаторов (например, левый) зарядили до напряжения U_0 и в момент времени $t = 0$ замкнули ключ K . Найти ток I в цепи как функцию времени t , а также количество тепла, выделившегося за все время процесса.



Решение

При $t = 0$ заряд положительной обкладки левого конденсатора (рис. 3.6) равен:

$$q_0 = U_0 C,$$

а правый конденсатор не заряжен.

Пронумеруем точки, соответствующие обкладкам конденсаторов, как показано на рисунке. Пусть точка 2 соответствует положительной обкладке. Тогда после замыкания ключа через сопротивление R потечет ток разрядки, направленный от точки 2 к точке 3.

Этот квазистационарный ток (см. предыдущую задачу) также подчиняется закону Ома (3.9):

$$IR = \varphi_2 - \varphi_3. \quad (1)$$

Прибавляя в правой части потенциал φ_4 , вычитая равный ему потенциал φ_1 (они равны из-за отсутствия сопротивления на участке 4–1) и пользуясь соотношением предыдущей задачи:

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad (2)$$

получим:

$$-\frac{dq}{dt}R = U_{лев} - U_{прав}, \quad (3)$$

где $U_{лев}$ и $U_{прав}$ – напряжения на левом и на правом конденсаторах соответственно. Они связаны с их зарядами:

$$U_{лев} = \frac{q}{C}, \quad U_{прав} = \frac{q_0 - q}{C}, \quad (4)$$

в последней формуле учтено, что суммарный заряд положительных обкладок обоих конденсаторов остается постоянным и равным q_0 .

Подставляя (4) в (3), получаем дифференциальное уравнение:

$$-\frac{dq}{dt}R = \frac{q}{C} - \frac{q_0 - q}{C}, \quad (5)$$

которое преобразуется к виду:

$$\frac{dq}{q - \frac{q_0}{2}} = -\frac{2}{RC} dt. \quad (6)$$

Интегрирование при начальном условии $q(0) = q_0$ дает:

$$\ln\left(\frac{2q}{q_0} - 1\right) = -\frac{2t}{RC}. \quad (7)$$

Потенцируя, получим зависимость заряда от времени:

$$q = \frac{q_0}{2} (1 + e^{-\frac{2}{RC}t}), \quad (8)$$

тогда, согласно (2), ток меняется по закону:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}, \quad (9)$$

т. е. экспоненциально убывает от наибольшего значения U_0/R до 0 за бесконечное время ($t \rightarrow \infty$). Однако, количество тепла, выделяющееся при этом, – величина конечная. Согласно (3.12), оно равно:

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t} \right]^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{4}{RC}t} dt = \frac{CU_0^2}{4}. \quad (10)$$

Такой же результат получается из закона сохранения энергии. Первоначально вся энергия запасена в одном, заряженном зарядом q_0 , конденсаторе и равна:

$$W_0 = \frac{CU_0^2}{2}. \quad (11)$$

В конце процесса заряд q_0 распределится поровну между обоими конденсаторами, и энергия каждого станет равной:

$$W_1 = \frac{\left(\frac{q_0}{2}\right)^2}{2C} = \frac{CU_0^2}{8}. \quad (12)$$

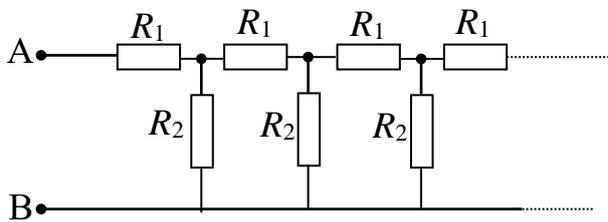
Энергия обоих конденсаторов:

$$W_2 = 2W_1 = \frac{CU_0^2}{4}. \quad (13)$$

меньше первоначальной. Разница равна теплоте, выделившейся в результате всего процесса:

$$Q = W_0 - W_2 = \frac{CU_0^2}{4}. \quad (14)$$

Задачи для контроля

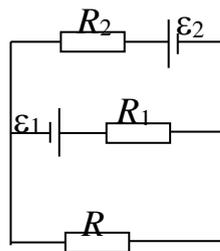
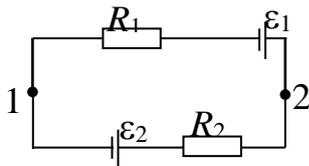


1. На рисунке показана бесконечная цепь, образованная повторением одного и того же звена – сопротивлений $R_1 = 4 \text{ Ом}$ и $R_2 = 3 \text{ Ом}$. Найти сопротивление между точками А и В.

2. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен стеклом с удельным сопротивлением $\rho = 100 \text{ ГОм}\cdot\text{м}$. Емкость конденсатора $C = 4 \text{ нФ}$. Найти ток утечки через конденсатор при подаче на него напряжения $U = 2 \text{ кВ}$.

3. Длинный проводник круглого сечения радиуса a сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r до оси проводника по закону $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$, где α – постоянная. Найти сопротивление единицы длины такого проводника.

4. Найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2 схемы,



если $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $\varepsilon_1 = 5 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 2 \text{ В}$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

5. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме, если $\varepsilon_1 = 1,5$ В, $\varepsilon_2 = 3,7$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R = 5$ Ом. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

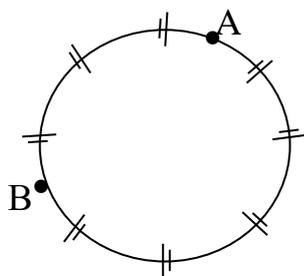
6. Сколько тепла выделится в спирали с сопротивлением $R = 75$ Ом при прохождении через нее количества электричества $q = 100$ Кл, если ток в спирали равномерно убывал до нуля в течение $\Delta t = 50$ с?

7. Доказать, что распределение тока в параллельно соединенных сопротивлениях R_1 и R_2 соответствует минимуму выделяемой на этом участке тепловой мощности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Конденсатор емкости $C = 400$ пФ подключили через сопротивление $R = 650$ Ом к источнику постоянного напряжения U_0 . Через сколько времени напряжение на конденсаторе станет $U = 0,9 U_0$?

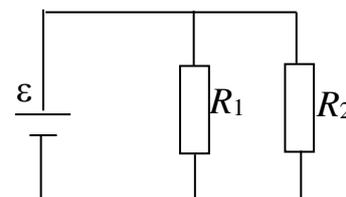
Ответ: $t = -RC \ln\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) = 0,6$ мкс.



2. Источники тока с различными э. д. с. соединены, как показано на рисунке. Э. д. с. источников пропорциональны их внутренним сопротивлениям: $\varepsilon = \alpha R$, где α – постоянная. Сопротивление проводов пренебрежимо мало. Найти ток в цепи и разность потенциалов между точками А и В.

Ответ: $I = \alpha$, $\varphi_A - \varphi_B = 0$.

3. В схеме на рисунке $\varepsilon = 5$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутреннее сопротивление источника $R = 0,1$ Ом. Найти токи, текущие через сопротивления R_1 и R_2 .

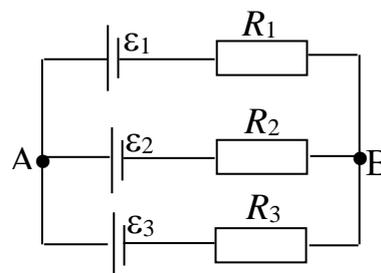


Ответ: $I_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R} = 1,2$ А, $I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_2} = 0,8$ А.

4. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с э. д. с. ε_1 и ε_2 и внутренними сопротивлениями R_1 и R_2 .

$$\text{Ответ: } \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}, \quad R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

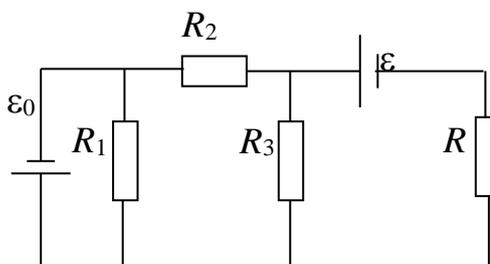
5. В схеме на рисунке $\varepsilon_1 = 1,5 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 2 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 2,5 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти ток через сопротивление R_1 и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками А и В.



$$\text{Ответ: } I_1 = 0,06 \text{ А},$$

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0,9 \text{ В}.$$

6. Найти ток через сопротивление R в схеме на рисунке. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.



$$\text{Ответ: } I = \frac{\varepsilon(R_2 + R_3) + \varepsilon_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

7. Сколько тепла выделится в спирали с сопротивлением $R = 75 \text{ Ом}$ при прохождении через нее количества электричества $q = 100 \text{ Кл}$, если ток в спирали монотонно убывал до нуля так, что через каждые $\Delta t = 2 \text{ с}$ он уменьшался вдвое?

$$\text{Ответ: } Q = \frac{\ln 2 \cdot q^2 R}{2\Delta t} = 0,13 \text{ МДж}.$$

8. Обкладкам конденсатора емкостью $C = 2 \text{ мкФ}$ сообщили разноименные заряды $q_0 = 1 \text{ мКл}$. Затем обкладки замкнули через сопротивление $R = 5 \text{ МОм}$. Найти: а) заряд, прошедший через это сопротивление за $\tau = 2 \text{ с}$;

б) количество тепла, выделившееся в сопротивлении за это же время.

$$\text{Ответ: а) } q = q_0 [1 - \exp(-\tau/RC)] = 0,18 \text{ мКл};$$

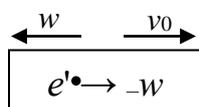
$$\text{б) } Q = \frac{q_0^2}{2C} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{RC}\right) \right] = 82 \text{ мДж}.$$

IV. Классическая теория проводимости металлов

§ 22. Природа носителей заряда в металлах

Природа носителей заряда в металлах была выяснена в начале XX в. Один из первых опытов был поставлен в 1901 г. Рикке, который предположил, что носителями заряда являются ионы. Через систему трех одинаковых цилиндров, предварительно взвешенных, медь–алюминий–медь, плотно сложенных хорошо отполированными торцами, в течение года пропускался ток одного направления. Идея состояла в следующем. Если носителями являются ионы, то медный цилиндр должен стать легче, а алюминиевый – тяжелее. После этого цилиндры были взвешены и, в пределах погрешности, масса не изменилась, это указывало на тот факт, что носителями заряда являются не ионы, а какие-то другие частицы, входящие в состав всех металлов. Было высказано предположение, что это электроны (открытые Томсоном в 1897 г.). Поскольку носители заряда в металлах начинают двигаться при возникновении малейшей разности потенциалов, т. е. ведут себя как свободные частицы, при торможении они должны проявиться.

Пусть проводник движется со скоростью \bar{v}_0 . Будем тормозить его с ускорением \bar{w} . Носители приобретут ускорение $-\bar{w}$. Такое же ускорение можно сообщить носителям с зарядом e' в неподвижном проводнике, если создать в нем электрическое поле напряженности



$$\bar{E} = -\frac{m\bar{w}}{e'}$$

т. е. приложить к его концам разность потенциалов (интегрирование ведется по всей длине проводника):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \bar{E} d\bar{l} = -\int_{(1)}^{(2)} \frac{m\bar{w}}{e'} d\bar{l} = -\frac{mwl}{e'}$$

при этом по проводнику потечет ток $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$ и за время dt будет перенесен заряд dq

$$dq = Idt = -\frac{mwl}{e'R} dt = -\frac{ml}{e'R} dv,$$

за все время торможения через поперечное сечение проводника будет перенесен заряд

$$q = \int_0^t dq = - \int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{m lv_0}{e' R}.$$

Измерив l , v_0 , R и q , можно найти удельный заряд носителей. Направление импульса тока позволит определить знак носителей заряда.

В 1913 г. Мандельштам и Папалекси поставили эксперимент, подтвердивший изложенную выше гипотезу на качественном уровне. К концам катушки, совершавшей крутильные колебания (т. е. носители заряда все время двигались с ускорением, знак которого менялся каждую четверть периода), был подсоединен телефон, в котором слышался шум, что свидетельствовало о протекании тока.

В 1916 г., после создания прибора для определения величины быстропротекающего заряда – баллистического гальванометра, Толменом и Стюартом был получен количественный результат. Катушка длиной 500 м приводилась во вращение с линейной скоростью на поверхности $v = 300$ м/с, затем резко тормозилась, и, с помощью баллистического гальванометра определялся заряд, протекавший за время торможения. Значение e'/m получилось очень близко к электронному – доказательство того, что носителями заряда в металлах являются электроны.

Происхождение свободных электронов объясняется следующим образом. При построении кристаллической решетки металла из расплава, атому энергетически выгодно отдать валентные электроны в междоузельное пространство, эти, бывшие валентные электроны и становятся электронами проводимости, а в узлах кристаллической решетки, таким образом, оказываются ионы. Такая схема позволяет легко оценить концентрацию электронов проводимости:

$$n = 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}.$$

§ 23. Классическая теория электропроводности металлов

Друде была предложена классическая теория электропроводности металлов на основе представлений о свободных электронах. Лоренц усовершенствовал теорию, учтя распределение электронов по скоростям, поэтому часто эту теорию называют теорией Друде–Лоренца.

Поскольку электроны в металле начинают двигаться при малейшей разности потенциалов, т. е. ведут себя как свободные частицы. Друде применил к ним результаты, хорошо развитой к этому времени молекулярно-кинетической теории газов, которая в основном была построена в 70-е гг. XIX в.

Основными положениями модели Друде являются следующие.

1. В интервале между столкновениями не учитываются взаимодействия электрона с другими электронами или ионами. Таким образом, в отсутствие внешних полей электроны движутся по прямой с постоянной скоростью, в присутствии внешних полей электрон движется по законам Ньютона. При этом учитывается только влияние внешних полей и пренебрегается полями, создаваемыми другими электронами и ионами.

2. Столкновения – мгновенные события, меняющие скорость электронов. В отличие от молекул газа, которые сталкиваются друг с другом, основную роль в «электронном газе» играют не столкновения электронов друг с другом, а столкновения электронов с ионами решетки, что приводит к установлению теплового равновесия между решеткой и электронным газом. Столкновением электронов друг с другом пренебрегают. Между столкновениями с ионами электроны проходят путь, равный длине свободного пробега λ .

В кинетической теории газов средняя тепловая скорость частиц массой m определяется следующей формулой

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

при $T \cong 300$ К для электрона получим, $\langle v \rangle \cong 10^5$ м/с.

При включении поля на хаотическое накладывается упорядоченное движение со средней скоростью $\langle u \rangle$. Ее можно оценить, задав плотность тока

$$j = ne\langle u \rangle.$$

Для оценки среднего значения скорости упорядоченного движения электрона $\langle u \rangle$, возьмем плотность тока $j = 10^7 \text{ А/м}^2 = 10 \text{ А/мм}^2$, что несколько выше, чем в бытовой сети, концентрация электронов $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$,

$$\langle u \rangle = \frac{j}{en} = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/с},$$

таким образом, скорость упорядоченного движения электронов много меньше скорости их теплового (хаотического) движения, $|\bar{v} + \bar{u}| \approx |\bar{v}|$.

Вызываемое полем изменение кинетической энергии обусловлено изменением среднего значения квадрата полной скорости:

$$\langle (\bar{v} + \bar{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle \bar{v}\bar{u} \rangle + \langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle.$$

Тогда:

$$\langle \Delta E_k \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}.$$

Получим рассмотренные выше законы с использованием модели Друде.

Закон Ома. Друде считал, что при столкновении с ионом электрон полностью передает ему свою энергию, т. е. $v_k = 0$. Пусть ускоряющее поле однородно, тогда ускорение электрона, в соответствии со вторым законом Ньютона, есть $w = \frac{eE}{m}$, а

$$u_{\max} = \frac{eE}{m} \tau,$$

где τ – среднее время между столкновениями, время релаксации.

Друде не учитывал распределение электронов по скоростям, $v = \text{const}$, в этом случае для времени релаксации получим:

$$\tau = \lambda/v.$$

Тогда к концу пробега электрон приобретет скорость:

$$u_{\max} = \frac{eE\lambda}{mv},$$

u меняется линейно, следовательно:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{1}{2} \frac{eE\lambda}{mv}.$$

Подставляя найденное значение для средней скорости упорядоченного движения электрона в выражение для плотности тока, будем иметь:

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

Сравнивая с законом Ома, получим выражение для проводимости:

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}.$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, то λ и, следовательно, проводимость были бы бесконечно велики, а сопротивление обращалось бы в нуль. Таким образом, согласно классической теории, электросопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами решетки.

Закон Джоуля–Ленца. К концу пробега электрон приобретает дополнительную энергию

$$\Delta \mathcal{E}_k = \frac{m u_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \lambda^2}{2mv^2} E^2,$$

которую он передает решетке. Эта энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. металл нагревается.

Каждый электрон претерпевает в единицу времени $1/\tau$ столкновений $\frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}$, тогда за единицу времени в единице объема должно выделяться

количество теплоты:

$$Q_{\text{уд}} = n \frac{1}{\tau} \Delta \mathcal{E}_k = \frac{ne^2 \lambda}{2m\nu} E^2 .$$

Тогда, с учетом выражения для проводимости, полученного выше, $Q_{\text{уд}} = \sigma E^2$ – это закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

Таким образом, классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля–Ленца. Однако она встретила с весьма существенными затруднениями, основными из которых являются два.

1. Из выражения для $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m\nu}{ne^2\lambda}$ следует, что сопротивление металлов должно возрасти как корень из температуры, так как n и $\lambda \neq f(T)$, а $\nu \sim \sqrt{T}$, в то время как эксперимент дает $\rho \sim T$.

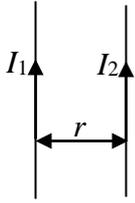
2. Электронный газ должен обладать молярной теплоемкостью $(3/2)R$, добавив это к теплоемкости решетки $3R$, получим $(9/2)R$, т. е. молярная теплоемкость металлов должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков, что противоречит эксперименту.

Разрешение этих противоречий дает квантовая теория металлов.

V. Магнитное поле в вакууме

§ 24. Взаимодействие токов

Неподвижные заряды взаимодействуют между собой с силой, определяемой законом Кулона. Упорядоченно движущиеся заряды, как указано выше, создают в проводнике ток. Из опыта известно, что электрические токи взаимодействуют между собой. Например, два прямолинейных параллельных проводника, расположенные на расстоянии r , по которым текут токи I_1 и I_2 , притягивают друг друга при одинаковом направлении токов и отталкиваются, если токи противоположны. Сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины каждого из проводников, есть:



$$F_{ed} = f = k \frac{2I_1 I_2}{r}.$$

Коэффициент пропорциональности $2k$. Этот закон был установлен Ампером в 1820 г.

Единица силы тока – ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого сечения, расположенным на расстоянии 1 м в вакууме, вызывает силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

В рационализированной системе

$$F_{ed} = f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r},$$

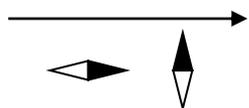
μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м (генри на метр). Единица измерения будет обсуждаться ниже.

Между ε_0 , μ_0 и электродинамической постоянной (скоростью света) c существует связь ($\varepsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м):

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

§ 25. Магнитное поле

Как взаимодействие неподвижных зарядов осуществляется через электрическое поле, взаимодействие токов осуществляется через поле, называемое магнитным. Название объясняется тем, что поле, возбуждаемое током, действует на магнитную стрелку.

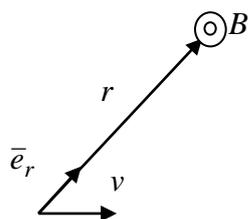


В опыте Эрстеда, поставленном в 1920 г., под прямой проводником, по которому пропускать ток, помещалась магнитная стрелка. Ток оказывал ориентирующее действие на стрелку. Стрелка меняла направление при изменении направления тока, откуда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Ее обозначают \vec{B} . Эту величину называют индукцией магнитного поля или магнитной индукцией, единица измерения тесла. Название напряженность магнитного поля носит величина H , аналогичная индукции D электрического поля.

Для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: поле системы токов равно геометрической сумме индукций полей, создаваемых каждым током в отдельности в данной точке пространства:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i.$$

Из изложенного выше понятно, что магнитное поле порождается движущимся зарядом. Это движение нарушает изотропность пространства (появляется выделенное направление скорости заряда \vec{v}). При $v \ll c$ (нерелятивистский случай) поле движущегося заряда определяется формулой



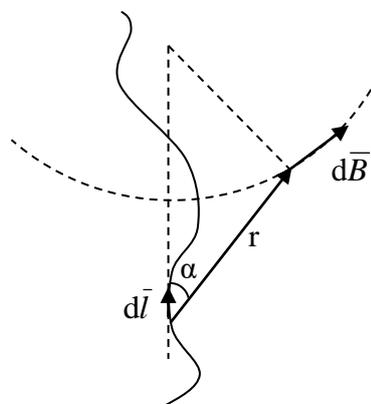
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \cdot \vec{e}_r]}{r^2}. \quad (\text{A})$$

Из определения видно, что \vec{B} – псевдовектор или аксиальный вектор.

§ 26. Закон Био–Савара–Лапласа

Найдем поле произвольного тонкого провода, по которому течет ток.

Рассмотрим малый элемент длины провода $d\vec{l}$, в нем содержится $nSdl$ носителей. В точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} , отдельный носитель e создает магнитное поле с индукцией



$$\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{r}]}{r^3},$$

где v – скорость хаотического движения носителей заряда.

Как обычно, усредним, с учетом того, что $\langle \vec{v} \rangle = 0$:

$$\langle \vec{B}' \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle] \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e[\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{r}]}{r^3}.$$

Умножив на число носителей, получим вклад в поле элемента $d\vec{l}$ проводника с током

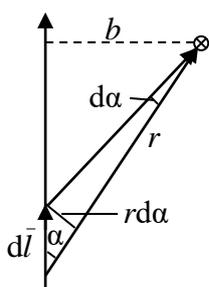
$$d\vec{B} = \langle \vec{B}' \rangle nSdl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S[(ne\langle \vec{u} \rangle) \cdot \vec{r}]dl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S[\vec{j} \cdot \vec{r}]dl}{r^3},$$

так как направления \vec{j} и $d\vec{l}$ совпадают, то можно написать $\vec{j}dl = j d\vec{l}$, тогда:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Sj[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (\text{B})$$

Мы вывели выражение (B) из (A). В действительности выражение (B) было получено экспериментально раньше, чем (A), а выражение (A) было выведено из (B).

Био и Савар в 1820 г. провели экспериментальное исследование магнитных полей, Лаплас провел теоретический анализ результатов, используя принцип суперпозиции, и получил выражение (B), поэтому это соотношение носит название закона Био–Савара–Лапласа.



Применим эту формулу к вычислению поля прямолинейного проводника с током (\vec{B} направлено за чертеж). Из геометрических соображений (см. рисунок) легко получить следующие соотношения:

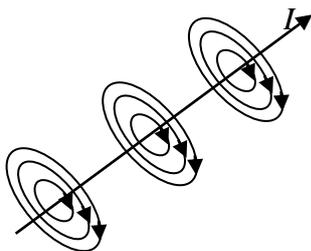
$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя все в закон Био–Савара–Лапласа, получим;

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b \cdot d\alpha \cdot r \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha.$$

Учитывая, что $0 \leq \alpha \leq \pi$, окончательно найдем:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$



Линии индукции магнитного поля B – система концентрических окружностей, охватывающих проводник с током. Кроме того, как будет показано дальше, $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ – такое поле называется вихревым или соленоидальным. Здесь $\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ – ротор индукции магнитного поля: векторное произведение оператора Гамильтона на вектор индукции магнитного поля.

§ 27. Сила Лоренца

На движущийся в магнитном поле заряд действует сила, которую называют магнитной. Она определяется величинами заряда q , скорости его движения \vec{v} и индукцией магнитного поля \vec{B} , в котором движется заряд. Эта сила зависит от взаимной ориентации векторов \vec{v} и \vec{B} . Экспериментально установлено, что в системе СИ сила имеет вид:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \cdot \vec{B}], \text{ или } F = qvB \sin \alpha.$$

Здесь B измеряется в тесла.

Заряд, движущийся вдоль линий магнитного поля, не подвергается воздействию этой силы. Эта сила, так как она направлена перпендикулярно v , не совершает над зарядом работы. Если имеется и электрическое поле E , то полная сила, называемая силой Лоренца, записывается в виде:

$$\bar{F} = q\bar{E} + q[\bar{v} \cdot \bar{B}].$$

§ 28. Закон Ампера

Если проводник, по которому течет ток, находится в магнитном поле, на каждый из носителей заряда действует сила

$$\bar{F}' = e[(\bar{v} + \bar{u}) \cdot \bar{B}].$$

От носителя заряда действие этой силы передается проводнику, в результате чего на проводник с током в магнитном поле действует сила. Найдем силу $d\bar{F}$, действующую на элемент проводника $d\bar{l}$.

Усредним силу F' , действующую на отдельный носитель, и учтем, что $\langle \bar{v} \rangle = 0$:

$$\langle \bar{F}' \rangle = e[(\langle \bar{v} \rangle + \langle \bar{u} \rangle) \cdot \bar{B}] = e[\langle \bar{u} \rangle \cdot \bar{B}].$$

Число носителей в элементе проводника $d\bar{l}$ есть $nSdl$, сила, действующая на элемент проводника dl , имеет вид:

$$d\bar{F} = \langle \bar{F}' \rangle nSdl = [(ne\langle \bar{u} \rangle) \cdot \bar{B}]Sdl = [\bar{j} \cdot \bar{B}]dV,$$

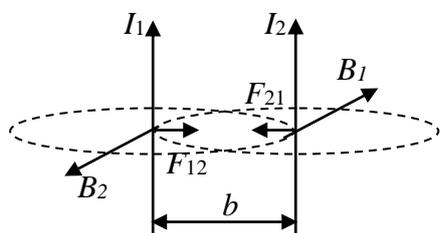
для объемной плотности силы получим:

$$\bar{f} = [\bar{j} \cdot \bar{B}].$$

Можно записать иначе $\bar{j}Sdl = jSd\bar{l} = Id\bar{l}$.

Тогда $d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$ – сила, действующая на элемент тока $d\vec{l}$ в магнитном поле. Это соотношение выражает закон Ампера.

Используя закон Ампера, можно найти силу взаимодействия между двумя бесконечно длинными параллельными проводниками.



Индукция магнитного поля, создаваемого первым током в точках, где находится второй проводник, есть:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b}.$$

Используя закон Ампера, легко получить силу, действующую на единицу длины второго проводника со стороны поля, созданного первым проводником с током

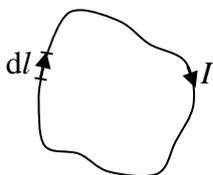
$$F_{21\text{ед}} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

Аналогично для силы, действующей на первый проводник с током со стороны поля, созданного вторым проводником.

При одинаковом направлении токов проводники притягиваются, при различных – отталкиваются (см. рисунок).

§ 29. Контур с током в магнитном поле

Рассмотрим поведение контура с током в магнитном поле. Пусть поле однородно $\vec{B} = \text{const}$. На элемент контура $d\vec{l}$ действует сила



$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

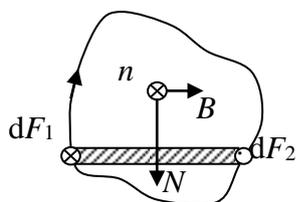
Проинтегрировав по всей длине контура, получим:

$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l} \cdot \vec{B}] = I[(\oint d\vec{l}) \cdot \vec{B}] = 0,$$

так как $\oint d\vec{l} = 0$.

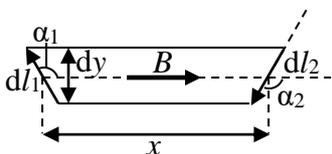
Т. е. результирующая сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю.

Справедливо для контура любой формы, расположенного произвольно относительно поля. В дальнейшем будем рассматривать только плоские контуры. Вычислим результирующий вращающий момент, создаваемый силами, приложенными к контуру.



$$\bar{N} = \int [\bar{r} \cdot d\bar{F}].$$

Пусть нормаль к контуру ориентирована перпендикулярно к индукции магнитного поля B . Разобьем площадь контура на узкие полоски (см. рисунок). На элемент контура $d\bar{l}_1$ действует сила $d\bar{F}_1$:



$$dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1 = IBdy,$$

аналогично на элемент dl_2 :

$$dF_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2 = IBdy.$$

Эти силы образуют пару, момент которой

$$dN = IBx dy = IBdS.$$

Здесь dS – площадь выделенной полоски. Момент силы $d\bar{N}$ перпендикулярен к векторам нормали \bar{n} и индукции магнитного поля \bar{B} .

$$d\bar{N} = I[\bar{n} \cdot \bar{B}]dS.$$

Проинтегрировав по всей площади контура, найдем момент сил, действующих на контур с током со стороны магнитного поля:

$$\bar{N} = \int I[\bar{n} \cdot \bar{B}]dS = I[\bar{n} \cdot \bar{B}]S = [(IS\bar{n}) \cdot \bar{B}].$$

Величина $\bar{p}_m = IS\bar{n}$ называется дипольным магнитным моментом.

Тогда:

$$\bar{N} = [\bar{p}_m \cdot \bar{B}].$$

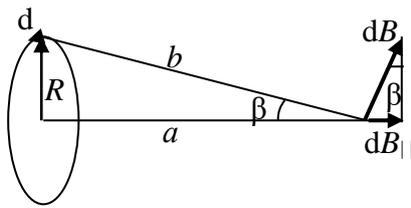
В случае, когда вектор индукции магнитного поля параллелен вектору нормали к контуру $\vec{n} \parallel \vec{B}$, момент $N = 0$ и силы стремятся либо сжать, когда нормаль и индукция магнитного поля антипараллельны ($\vec{n} \downarrow \vec{B}$), либо растянуть, когда эти векторы параллельны ($\vec{n} \uparrow \vec{B}$), контур.

Если плоский контур находится в неоднородном магнитном поле, сила имеет вид:

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha,$$

α – угол между дипольным моментом \vec{p}_m и индукцией магнитного поля \vec{B} .

Если дипольный магнитный момент параллелен индукции магнитного поля $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$, сила втягивает контур в область более сильного поля. Если эти векторы антипараллельны $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$, контур выталкивается из поля.



Для справок приведем расчет магнитного поля кругового тока. Сначала рассчитаем поле в его центре. Разобьем ток на бесконечно малые элементы dl и запишем поле, созданное таким элементом в центре кольца с током, воспользовавшись законом Био–Савара–Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}.$$

Проинтегрировав по всей длине кольца, получим:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3},$$

поле в центре кругового тока.

Найдем поле в произвольной точке, лежащей на оси кольца. Поле на оси кольца направлено вдоль оси, так как поперечные составляющие взаимно компенсируются (см. рисунок). Тогда:

$$dB_{\parallel} = dB \sin \beta = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{b^2} \frac{R}{b},$$

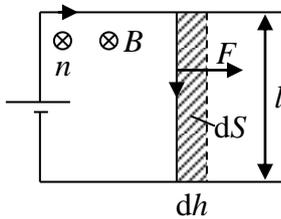
так как угол между dl и b равен 90° , $\sin \alpha = 1$, b – расстояние от выделенного элемента до точки наблюдения.

Выполняя интегрирование, получим:

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi b^3} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Здесь a – расстояние от центра кольца до точки наблюдения.

§ 30. Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле



Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и подвижной перемычкой длины l . Пусть этот контур находится в однородном внешнем магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура и направленным, как показано на рисунке, за чертеж. Тогда сила, действующая на перемычку, будет направлена вправо.

$$F = IBl.$$

При перемещении перемычки на dh эта сила совершит работу

$$dA = Fdh = IBldh = IBdS.$$

Выясним, как изменяется при перемещении перемычки поток магнитной индукции Φ через площадь контура. В качестве положительной нормали \bar{n} к контуру условились брать нормаль, образующую с током правовинтовую систему.

$$d\Phi = \bar{B}\bar{n}dS,$$

или

$$\Phi = \int \bar{B}\bar{n}dS.$$

Для рассматриваемого случая $\Phi = BS$ ($d\Phi = BdS$).

Тогда работа:

$$dA = Id\Phi.$$

$d\Phi$ – это поток через площадь dS , описанную перемычкой при ее движении.

В случае обратного направления поля сила меняет направление, $dS < 0$, и магнитная сила совершает отрицательную работу:

$$dA = -IBldh = -IBdS.$$

В векторной форме:

$$dA = I\bar{B}\bar{n}dS.$$

В случае постоянного тока $I = const$, после интегрирования получим:

$$A = \int Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

т. е. работа, совершаемая магнитными силами над контуром, равна произведению силы тока на приращение магнитного потока, пронизывающего контур.

§ 31. Теорема Гаусса для магнитного поля. Закон полного тока

Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность, как показано выше, равен:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = N_{\text{вых}} - N_{\text{вх}},$$

здесь $N_{\text{вых}}$ и $N_{\text{вх}}$ число силовых линий электрического поля, выходящих из гауссовой поверхности и входящих в нее.

Аналогичное соотношение можно записать для потока вектора индукции магнитного поля:

$$\Phi_B = N_{\text{вых}} - N_{\text{вх}}.$$

Причем линии вектора \vec{B} строятся так же, как и линии вектора напряженности электрического поля \vec{E} .

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии индукции магнитного поля \vec{B} замкнуты. Поэтому:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

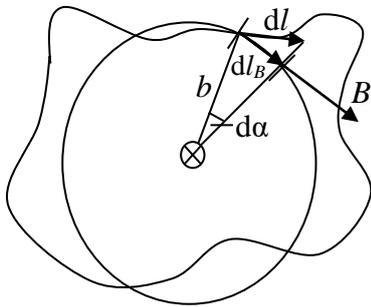
Это теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля в интегральной форме: поток вектора индукции магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса, можем записать:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{B} dV = 0,$$

что должно быть справедливо для любого объема, выбранного произвольно, тогда:

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$



в отличие от электрического поля, где $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$.

Это теорема Гаусса для индукции магнитного поля \vec{B} в дифференциальной форме.

Рассмотрим циркуляцию вектора \vec{B} вдоль произвольного контура:

$$\oint \vec{B} d\vec{l}.$$

Рассмотрение проведем на примере прямого проводника с током и учтем, что вектор индукции магнитного поля направлен по касательной к окружности, проведенной через точку наблюдения с центром в центре проводника.

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl_B, \quad dl_B = b d\alpha, \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b},$$

как следует из рисунка, откуда:

$$\bar{B}d\bar{l} = Bdl_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha,$$

тогда:

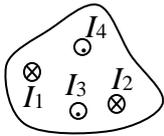
$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha = \mu_0 I,$$

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 I,$$

где I – ток, охватываемый контуром.

Полученный результат справедлив для тока, текущего по проводнику произвольной формы. Пусть контур охватывает несколько проводников с током.

В силу принципа суперпозиции, суммарное поле равно сумме полей, создаваемых каждым из токов:



$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \oint \left(\sum_k \bar{B}_k \right) d\bar{l} = \sum_k \oint \bar{B}_k d\bar{l},$$

причем:

$$\oint \bar{B}_k d\bar{l} = \mu_0 I_k.$$

Тогда:

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 \sum_k I_k.$$

Причем токи – величины алгебраические. Это соотношение называется законом полного тока.

Запишем ток через плотность тока:

$$\sum I_k = \int_S \bar{j}d\bar{S} = \int_S \bar{j}\bar{n}dS.$$

Тогда:

$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{j}d\bar{S}.$$

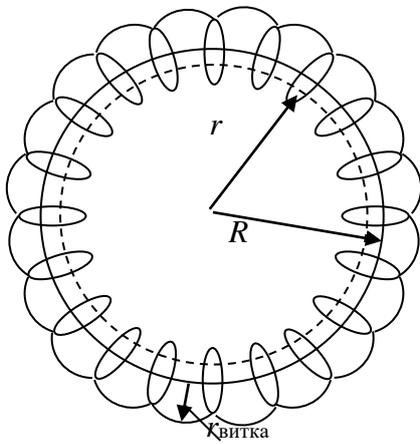
Воспользуемся теоремой Стокса:

$$\oint_S \bar{B} d\bar{l} = \int_S [\nabla \cdot \bar{B}] d\bar{S} = \int_S \text{rot} \bar{B} d\bar{S}.$$

Циркуляция вектора вдоль произвольного контура равна интегралу от ротора этого вектора по поверхности, натянутой на контур. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, получим:

$$\int_S \text{rot} \bar{B} d\bar{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\bar{S},$$

или, в силу произвольности выбранного контура:



$$\text{rot} \bar{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Полученное соотношение справедливо для поля в вакууме в отсутствие меняющихся во времени электрических полей.

Магнитное поле можно характеризовать векторным потенциалом

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A},$$

поскольку $\text{div} \bar{B} = 0$, а $\text{div} \text{rot} \bar{A} \equiv 0$.

Если контур не охватывает токов, то $\oint \bar{B} d\bar{l} = 0$.

В качестве примера рассмотрим поле тороида – это проводник, навитый на тор. R – радиус тора, $r_{\text{витка}}$ – радиус витка проводника, r – радиус контура. В силу симметрии вектор \bar{B} направлен по касательной к контуру:

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = B 2\pi r,$$

$$I_{\text{пол}} = 2\pi R n I,$$

где n – число витков на единицу длины, I – ток, текущий по витку. Тогда:

$$B 2\pi r = \mu_0 2\pi R n I,$$

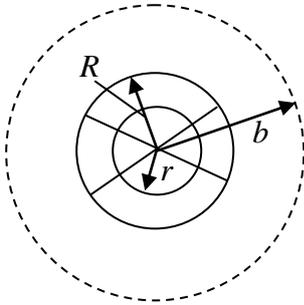
или

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r},$$

где nI – число ампер-витков на метр.

Для контура вне тороида $I = 0$ и $B = 0$, т. е. поле тороида сосредоточено внутри тороида. При $R \gg r_{\text{витка}}$, $R \cong r$ и $B = \mu_0 n I$, а это поле соленоида. Для такого тороида можно говорить об однородности поля.

§ 32. Поле внутри проводника с током



Пусть по цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток I . Найдем поле на расстоянии r от оси проводника. В силу симметрии задачи контур выберем в форме окружности, при $r < R$ будем иметь:

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = B 2\pi r = \mu_0 \int j dS = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2,$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}.$$

Откуда:

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^2 r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2},$$

$$B = \frac{\mu_0 2Ir}{4\pi R^2}.$$

Вне проводника $b > R$, по-прежнему:

$$B 2\pi b = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b},$$

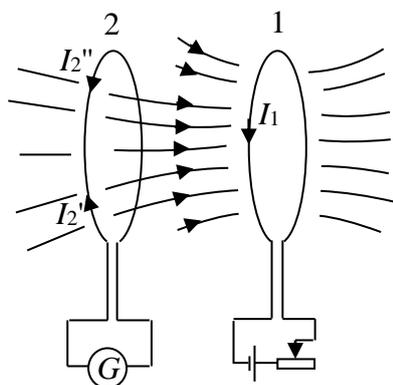
как было показано ранее.

VI. Электромагнитная индукция

§ 33. Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей обнаружил, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность этого контура возникает электрический ток. Явление называется явлением электромагнитной индукции, а возникающий в контуре ток – индукционным. Таким образом, при изменении потока магнитной индукции, пронизывающей контур, в контуре возникает электродвижущая сила, которая называется электродвижущей силой индукции, ее обозначают \mathcal{E}_i . Она не зависит от способа изменения Φ и определяется лишь скоростью изме-

нения магнитного потока $\frac{d\Phi}{dt}$. Знак \mathcal{E}_i

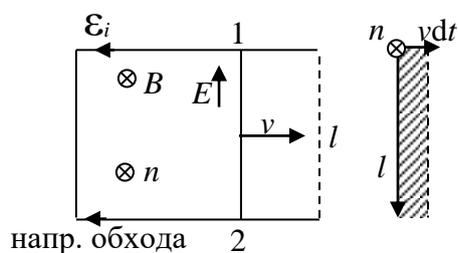


определяется знаком $\frac{d\Phi}{dt}$.

Ленц установил правило, позволяющее найти направление индукционного тока: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей. При увеличении тока I_1 возникает ток I_2' , при уменьшении I_1 возникает I_2'' . (Заметим, что правило Ленца

представляет собой применение общего термодинамического принципа Ле Шателье к электродинамическим процессам).

§ 34. Э. д. с. индукции



напр. обхода 2

Вновь рассмотрим контур с подвижной перемычкой, помещенный в магнитное поле. Будем перемещать перемычку со скоростью v . Направления всех векторов показаны на рисунке. На каждый электрон будет действовать сила, направленная вдоль перемычки:

$$\bar{F}_{\parallel} = -e[\bar{v} \cdot \bar{B}].$$

Эта сила эквивалентна силе, действующей со стороны электрического поля, напряженность которого есть

$$\bar{E} = [\bar{v} \cdot \bar{B}].$$

Это поле неэлектростатического происхождения. Его циркуляция по контуру дает величину э. д. с., индуцируемой в контуре.

$$\mathcal{E}_i = \oint E dl = \oint [\bar{v} \cdot \bar{B}] d\bar{l} = \int_{(1)}^{(2)} [\bar{v} \cdot \bar{B}] d\bar{l},$$

так как $\bar{v} \neq 0$ только на участке 1–2.

Будем считать $\mathcal{E}_i > 0$, если ее направление образует с направлением нормали правовинтовую систему.

$$\mathcal{E}_i = [\bar{v} \cdot \bar{B}] \int_{(1)}^{(2)} d\bar{l} = [\bar{v} \cdot \bar{B}] \bar{l} = \frac{\bar{B}[\bar{l} \cdot \bar{v} dt]}{dt} = -\frac{\bar{B} \bar{n} dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

здесь мы воспользовались правилом перестановки векторов в смешанном произведении. Таким образом:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Единица потока магнитной индукции Φ – вебер – это поток через поверхность в 1 м^2 , пересекаемую нормальными линиями магнитного поля с индукцией, равной 1 тесла. При $\frac{d\Phi}{dt} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{с}}$, $\mathcal{E}_i = 1 \text{ В}$.

Если контур состоит не из одного, а из N витков, то \mathcal{E}_i будет равна сумме э. д. с., индуцируемых в каждом контуре, поскольку витки соединены последовательно.

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum \Phi_k,$$

здесь Φ_k – магнитный поток через k -тый контур. Величина

$$\Psi = \sum \Phi_k$$

называется полным магнитным потоком через сложный контур или потокосцеплением.

§ 35. Явление самоиндукции

Электрический ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур полный магнитный поток Ψ . При изменении I изменяется и Ψ , и как следствие, в контуре индуцируется э. д. с. Это явление называется самоиндукцией.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда следует, что ток I в контуре и создаваемый им полный магнитный поток Ψ через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI,$$

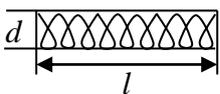
введенная здесь величина L называется индуктивностью контура.

Линейная зависимость Ψ от I наблюдается только в том случае, если магнитная проницаемость среды μ , окружающей контур, не зависит от напряженности поля H , что обозначает отсутствие материалов, называемых ферромагнетиками.

При неизменной силе тока полный поток может меняться за счет изменения формы и размеров контура.

Таким образом, индуктивность L зависит от геометрии контура и магнитных свойств окружающей среды. Жесткий контур в немагнитной среде обладает постоянной индуктивностью L .

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в 1 А возникает сцепленный с ним поток Ψ , равный 1 Вб. Эту единицу называют генри.



В качестве примера рассмотрим индуктивность соленоида. (Напомним, что соленоидом называется катушка цилиндрической формы длиной l и диаметром d). Возьмем соленоид, у которого $l \gg d$. Пусть по нему течет ток I , тогда внутри соленоида возбуждается, как показано выше, однородное поле.

$$B = \mu_0 n I,$$

где n – число витков на единицу длины.

Поток через каждый виток

$$\Phi = BS.$$

Тогда:

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0 n^2 lIS = \mu_0 n^2 IV,$$

где l – длина, S – площадь поперечного сечения соленоида.

Сравнивая, получаем:

$$L = \mu_0 n^2 lS = \mu_0 n^2 V,$$

при этом μ_0 имеет размерность – индуктивность / длина.

При изменении силы тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_S = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right).$$

При $L = const$

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{dI}{dt}.$$

Знак минус обусловлен, как и прежде, правилом Ленца, т. е. индукционный ток направлен так, чтобы препятствовать причине, его породившей.

Если $L \neq const$, тогда $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt}$, и для \mathcal{E}_S будем иметь

$$\mathcal{E}_S = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt},$$

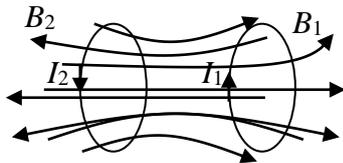
т. е. при наличии ферромагнетика, коэффициент пропорциональности не равен L .

В массивных проводниках, движущихся в неоднородном магнитном поле или находящихся в переменном магнитном поле, вследствие явления электромагнитной индукции возникают индукционные токи, которые называются токами Фуко. Поскольку сопротивление массивных проводников мало, токи Фуко могут достигать значительных величин. Токи Фуко могут играть как положительную, так и отрицательную роль.

Для получения материалов высокой чистоты используют плавление в так называемых индукционных печах, в которых создается переменное электромагнитное поле высокой частоты. Выделяемого при этом количества теплоты достаточно для того, чтобы расплавить помещенный в печь металл. В соответствии с правилом Ленца, вихревые токи направлены так, что приводят к торможению проводника, движущегося в магнитном поле. Торможение металла в магнитном поле используют для демпфирования подвижных частей электроизмерительных приборов.

В трансформаторах, приборах для преобразования напряжения переменного тока токи Фуко могут приводить к значительному нагреванию их сердечников и, следовательно, к потерям энергии. Чтобы предотвратить эти потери, сердечники набирают из тонких пластин, между которыми помещают изолирующие прослойки. Сердечники набирают так, чтобы токи Фуко были направлены перпендикулярно пластинам.

§ 36. Взаимная индукция



Если два контура близко расположены друг к другу, то ток, текущий в первом контуре, создает магнитный поток через второй:

$$\Psi_2 = L_{21} I_1.$$

Тогда во втором контуре, при изменении тока I_1 в первом контуре, возникает индукционная э. д. с.:

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогично наоборот:

$$\Psi_1 = L_{12}I_2,$$

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Контур 1 и 2 называются индуктивно связанными, а явление возникновения э. д. с. в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией. L_{21} и L_{12} называются взаимной индуктивностью контуров.

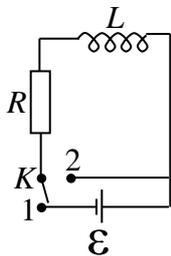
В отсутствие ферромагнетиков:

$$L_{21} = L_{12}.$$

Их величина зависит от формы, размеров, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды. Единица измерения – генри.

§ 37. Ток при замыкании и размыкании цепи

Дополнительные токи, возникающие вследствие самоиндукции, в соответствии с правилом Ленца, всегда препятствуют изменениям тока, их вызвавшим. При включении в цепь источников тока токи самоиндукции направлены противоположно току, создаваемому источником. При выключении тока они имеют то же направление, что и убывающий ток источника. Поэтому индуктивность цепи проявляется в замедлении процессов исчезновения и установления тока. Рассмотрим эти процессы более подробно.



Найдем сначала закон убывания тока при размыкании цепи. При положении ключа K в точке 1 в цепи течет ток:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

этот ток стационарный.

Отключим источник, одновременно переведя ключ в положение 2. Ток начнет убывать, но одновременно возникнет э. д. с. самоиндукции, препятствующая его убыванию:

$$\varepsilon_S = IR = -L \frac{dI}{dt},$$

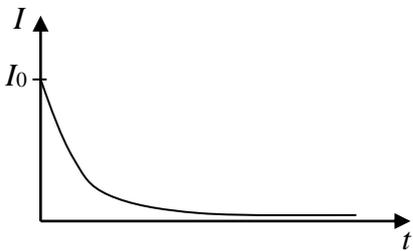
в соответствии со вторым правилом Кирхгофа. Последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt \quad \text{или} \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t.$$

Откуда:



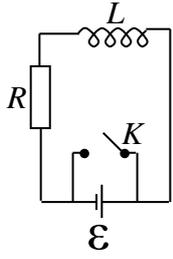
$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Таким образом, ток в цепи убывает по экспоненте:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = \frac{L}{R}$ – постоянная времени цепи – это время, в течение которого начальное значение силы тока I_0 убывает в e раз.

Чем больше L и меньше R , тем медленнее убывает ток. $I \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Этим объясняется проскакивание искры в момент отключения. Цепь размыкается, энергия выделяется в виде излучения.



Рассмотрим случай замыкания цепи. Теперь с нарастанием тока, наряду с внешней э. д. с. \mathcal{E} , будет действовать и э. д. с. самоиндукции \mathcal{E}_s . Причем в соответствии с правилом Ленца, \mathcal{E}_s действует против \mathcal{E} . Вновь применим II правило Кирхгофа:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}.$$

Преобразовав, получим уравнение:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L},$$

это линейное, неоднородное дифференциальное уравнение I порядка. Возможны несколько вариантов решения этого уравнения.

Введем новую переменную:

$$U = RI - \mathcal{E}, \quad \frac{dU}{dt} = R \frac{dI}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU}{dt}.$$

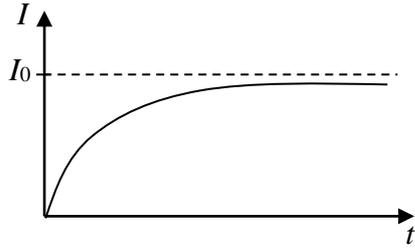
Выполняя указанную замену в исходном уравнении

$$IR - \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}, \quad U = -\frac{L}{R} \frac{dU}{dt},$$

и разделяя переменные, найдем:

$$\frac{dU}{U} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируя с учетом начальных условий, при $t_0 = 0$, $I = 0$, $U = -\mathcal{E}$, получим:



$$\int_{-\varepsilon}^{U(t)} \frac{dU}{U} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt, \quad \ln \left| \frac{U(t)}{-\varepsilon} \right| = -\frac{R}{L} t$$

$$\text{откуда } U(t) = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Возвращаясь к прежней переменной,

будем иметь:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L} t},$$

или в окончательном виде:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Таким образом, скорость установления тока определяется той же постоянной времени, что и его убывание. Процесс установления тока также носит асимптотический характер.

VII. Магнитное поле в веществе

§ 38. Намагничивание магнетиков и напряженность магнитного поля

До сих пор мы рассматривали магнитное поле, создаваемое токами в вакууме. Если проводники находятся в какой-либо среде, магнитное поле изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т. е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент – намагничиваться. (Здесь ситуация в некотором смысле аналогична поляризации диэлектрика во внешнем электрическом поле). Намагниченное вещество создает поле \bar{B}' , которое накладывается на внешнее поле \bar{B}_0 . Оба поля в сумме дают результирующее поле

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}'.$$

Идея объяснения явления намагничивания веществ принадлежит Амперу, который предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые (молекулярные) токи. Каждый такой ток создает магнитное поле. В отсутствие внешнего поля магнитные моменты ($\bar{p}_m = IS\bar{n}$), создаваемые молекулярными токами, ориентированы произвольным образом, и результирующее поле равно нулю. Под действием магнитного поля магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию в направлении магнитного поля, магнетик намагничивается, магнитные поля отдельных молекулярных токов уже не компенсируют друг друга, и возникает результирующее поле \bar{B}' .

Намагничение магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эта величина называется намагниченностью (аналог поляризованности диэлектрика):

$$\bar{M} = \frac{\sum \bar{p}_m}{\Delta V}.$$

Для характеристики магнитного поля вводят дополнительную величину \bar{H} – напряженность магнитного поля, которая связана с индукцией \bar{B} соотношением:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M},$$

намагниченность пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$\bar{M} = \chi \bar{H}.$$

χ – характерная для данного магнетика величина, называемая магнитной восприимчивостью. Величина безразмерная. Характеризует магнитные свойства вещества. В отличие от диэлектрической восприимчивости, которая всегда положительна, может быть как положительной, так и отрицательной. Для неферромагнитных веществ, в не слишком сильных магнитных полях, χ не зависит от напряженности магнитного поля. Комбинируя два последних соотношения, получим:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu}.$$

Здесь $\mu = 1 + \chi$ – магнитная проницаемость среды, может быть как больше, так и меньше 1.

Из соотношения $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0\mu}$ следует, что в изотропных средах \bar{H} есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор \bar{B} , но в $\mu_0\mu$ раз меньший по модулю. Из соотношения $H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$ следует, что единица напряженности магнитного поля – ампер, деленный на метр.

§ 39. Виды магнетиков

Введенная выше величина магнитной восприимчивости χ определяет магнитную восприимчивость единицы объема вещества. Принято вместо этой величины пользоваться восприимчивостью, отнесенной к киломолю или килоатому.

$$\chi_{\text{км}} = \chi V_{\text{км}}.$$

Размерность этой величины $[\chi_{\kappa\mu}] = \text{м}^3/\text{кмоль}$.

В зависимости от величины и знака магнитной восприимчивости χ все магнетики подразделяются на три группы:

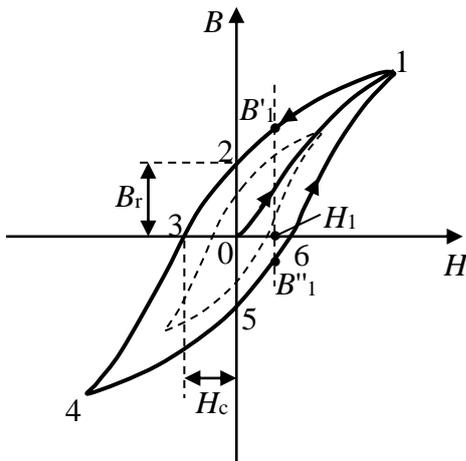
- 1) диамагнетики, $\chi_{\kappa\mu} < 0$, $|\chi_{\kappa\mu}| \sim 10^{-8} \div 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кмоль}$;
- 2) парамагнетики, $\chi_{\kappa\mu} > 0$, $\chi_{\kappa\mu} \sim 10^{-7} \div 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кмоль}$;
- 3) ферромагнетики, $\chi_{\kappa\mu} > 0$, $\chi_{\kappa\mu} \sim 10^3 \text{ м}^3/\text{кмоль}$.

Причем у ферромагнетиков магнитная восприимчивость χ , а, следовательно, и магнитная проницаемость μ зависит от напряженности магнитного поля. Полная намагниченность магнетика, как указано выше, определяется соотношением

$$M = \chi H,$$

откуда ясно, что для диамагнетиков намагниченность направлена против внешнего магнитного поля $M \uparrow \downarrow H$, для пара- и ферромагнетиков эти два вектора параллельны $M \downarrow \downarrow H$. После намагничивания ферромагнетики могут обладать намагниченностью и в отсутствие внешнего магнитного поля. Это свойство ферромагнетиков используют для изготовления постоянных магнитов.

§ 40. Гистерезис

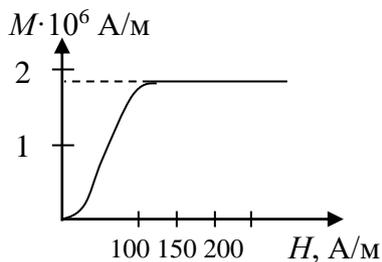


К ферромагнетикам относятся железо, никель, гадолиний, кобальт и другие элементы, соединения и сплавы. Намагниченность ферромагнетиков в 10^{10} раз превосходит намагниченность пара- и диамагнетиков.

Кривая намагничивания железа, зависимость индукции магнитного поля в веществе от напряженности внешнего поля впервые была получена и изучена Столетовым. Для железа (и других ферромагнетиков) характерно наличие гистерезиса.

При действии переменного поля индукция меняется по кривой 0–1–2–3–4–5–6–1–2–... , называемой петлей гистерезиса. Величина, определяемая точкой пересечения петли гистерезиса с осью индукции магнитного поля B_r – остаточная индукция, т. е. индукция магнитного поля ферромагнетика, когда напряженность внешнего магнитного поля обращается в нуль, при этом M_r – остаточная намагниченность. На этом основано изготовление постоянных магнитов. Величина напряженности внешнего магнитного поля, в котором индукция ферромагнетика обращается в нуль H_c , называется коэрцитивной силой.

Основы теории ферромагнетизма были созданы Френкелем и Гейзенбергом в 1928 г.



Рассмотрим кривую зависимости намагниченности ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля. Вначале, при увеличении напряженности внешнего магнитного поля, намагниченность материала увеличивается, магнитные моменты молекул ориентируются по

полю. При достижении некоторого значения напряженности внешнего магнитного поля все магнитные моменты молекул выстраиваются по полю, намагниченность достигает насыщения $\bar{M}_{\text{нас}} = \text{const}$. Учитывая, что

$$\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}),$$

при насыщении $\bar{B} = \mu_0\bar{H} + \text{const}$, т. е. индукция магнитного поля ферромагнетика растет по линейному закону с ростом напряженности внешнего магнитного поля.

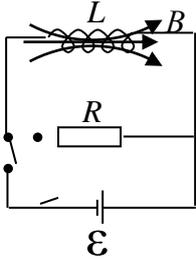
В ферромагнетиках существуют области спонтанного намагничения – домены.

При определенной температуре, которая называется точкой Кюри T_c , области спонтанного намагничения распадаются, материал утрачивает ферромагнитные свойства. Температуры Кюри для железа и никеля соответственно равны $T_c^{\text{Fe}} = 768$ °С, $T_c^{\text{Ni}} = 365$ °С.

При температурах выше температуры Кюри $T > T_c$, ферромагнетик превращается в парамагнетик, его магнитная восприимчивость меняется по закону Кюри–Вейсса:

$$\chi_{\kappa\mu} = \frac{C}{T - T_c}.$$

§ 41. Энергия магнитного поля



Рассмотрим электрическую цепь, содержащую индуктивность L , активное сопротивление R и источник э. д. с. \mathcal{E} . При замкнутом ключе в соленоиде установится магнитное поле с индукцией B . Если отключить источник э. д. с. \mathcal{E} и замкнуть цепь на активное сопротивление, то через него в течение некоторого времени будет течь ток, поддерживаемый возникающей в соленоиде э. д. с. самоиндукции. Работа, совершаемая током, как показано выше, есть

$$dA = \mathcal{E}_s Idt = -\frac{d\Phi}{dt} Idt = -Id\Phi.$$

При постоянной индуктивности $L = const$ ($d\Phi = LdI$) для работы можно написать: $dA = -LIdI$. Проинтегрировав последнее соотношение, найдем (ток убывает от I до 0):

$$A = -\int_I^0 LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

При отсутствии механических движений и химических реакций эта работа идет на приращение внутренней энергии сопротивления, соленоида и соединительных проводов, т. е. на их нагревание. В процессе совершения работы исчезает магнитное поле. Поскольку никаких других изменений в окружающем пространстве не происходит, то единственный вывод, который следует сделать, состоит в том, что магнитное поле является носителем энергии, которая превращается во внутреннюю энергию элементов рассматриваемой цепи. Таким образом, проводник с индуктивностью L , по которому течет ток I , обладает энергией

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле (напомним, что энергия электрического поля, локализованного в конденсаторе, равна

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2}{2} \frac{Sd}{d^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V).$$

Это выражение можно трактовать и иначе, как работу, которую нужно совершить против э. д. с. самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до I . Совершенная работа идет на создание магнитного поля, обладающего энергией

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) L dt = \int_0^I L I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Выразим эту энергию через величины, характеризующие само поле. Поле в среде есть $B = \mu_0 \mu H$, μ – магнитная проницаемость среды. Тогда, так как индуктивность соленоида равна

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Напряженность магнитного поля, создаваемого током, текущем в соленоиде

$$H = nI,$$

откуда:

$$I = \frac{H}{n},$$

подставляя L и I в предыдущее соотношение для энергии, получим:

$$W = \frac{\mu_0 \mu n^2 I^2}{2} V = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V,$$

или, введя объемную плотность энергии, найдем:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Этому выражению можно придать другую форму, воспользовавшись соотношением, связывающим индукцию и напряженность магнитного поля:

$$w = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

Полученное выражение аналогично выражению для плотности энергии электрического поля.

Сводка основных формул и задачи к разделам V–VII

Элемент объема dV , по которому течет электрический ток, характеризующийся вектором плотности тока \vec{j} , создает в точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} , проведенным из этого элемента, магнитное поле с индукцией $d\vec{B}$, равной, по закону Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3} dV, \quad (4.1)$$

$r = |\vec{r}|$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Для тока I , текущего по тонкому проводнику, этот же закон имеет вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.2)$$

Здесь $d\vec{l}$ – бесконечно малый вектор, направленный по касательной к проводнику. Сонаправленный с ним вектор $I d\vec{l}$ называется элементом тока.

Для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции:

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^K \vec{B}_k, \quad (4.3)$$

где \vec{B}_k – индукция, созданная в данной точке k -м элементом, \vec{B} – вектор индукции магнитного поля, созданного всеми элементами.

В частности, индукция, созданная участком тонкого проводника, по которому течет ток между точками 1 и 2, находится интегрированием по этому участку:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{(1)}^{(2)} \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.3a)$$

Для бесконечного прямолинейного проводника интегрирование дает:

$$B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (4.4)$$

где a – расстояние от данной точки поля до проводника.

Направление вектора индукции в этом случае связано с направлением тока так же, как связаны между собой направления вращения и поступательного движения винта с правой нарезкой (правило буравчика). Для точки, лежащей на расстоянии a от конца полубесконечного проводника в перпендикулярной ему плоскости:

$$B_{\parallel/\infty} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}. \quad (4.5)$$

Величина индукции магнитного поля, создаваемого в центре кругового тока радиуса R :

$$B_{кр} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (4.6)$$

Этот вектор направлен по оси кругового тока перпендикулярно его плоскости так, чтобы из его конца ток в контуре был виден текущим против часовой стрелки.

Циркуляция вектора магнитной индукции (в вакууме) по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов, текущих внутри контура, умноженной на магнитную постоянную:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{k=1}^K I_k. \quad (4.7)$$

Ток I_k считается положительным, если из конца соответствующего вектора плотности тока \vec{j}_k видно, что обход контура L происходит против часовой стрелки.

На элемент тока $I d\vec{l}$ в магнитном поле с индукцией \vec{B} действует сила Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (4.8)$$

Силу, действующую на участок проводника с током 1–2, рассчитывают интегрированием этого выражения:

$$\vec{F}_{1,2} = I \int_{(1)}^{(2)} [d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (4.9)$$

В случае замкнутого контура с током в однородном поле ($\vec{B} = \text{const}$) суммарная сила $\vec{F} = 0$. Суммарный момент сил Ампера:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}]. \quad (4.10)$$

Здесь \vec{p}_m – вектор магнитного момента контура:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (4.11)$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограниченной контуром.

Вектор \vec{p}_m направлен так, чтобы из его конца ток в контуре был виден текущим против часовой стрелки.

Вращающий момент \vec{M} (4.10) стремится привести контур в положение устойчивого равновесия, при котором векторы \vec{p}_m и \vec{B} параллельны.

Магнитным потоком через поверхность S с внешней нормалью \vec{n} называют интеграл от вектора индукции магнитного поля:

$$\Phi = \iint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}), \quad (4.12)$$

здесь $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$.

При изменении магнитного потока в контуре, ограничивающем эту поверхность, возникает э. д. с. индукции. По закону Фарадея, она равна:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.13)$$

Знак «минус» соответствует правилу Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти магнитную индукцию, создаваемую участком прямолинейного проводника с током I в точке, отстоящей от него на расстоянии a . Направление на эту точку из концов участка 1 и 2 задается углами α_1 и α_2 соответственно.

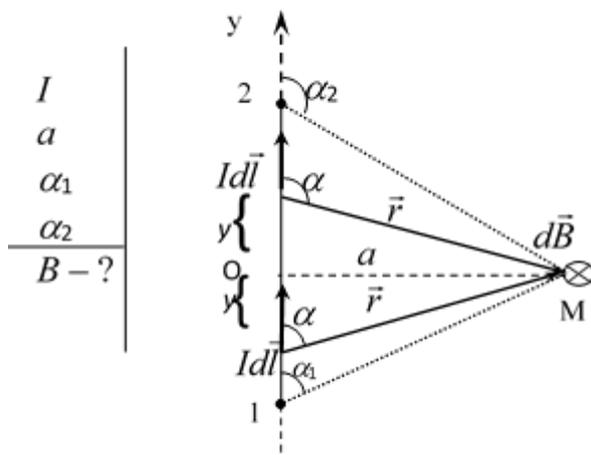


Рис. 4.1.

Решение

Из точки M , в которой требуется найти магнитную индукцию (рис. 4.1), опустим перпендикуляр MO на прямую, содержащую участок проводника 1–2 (длина перпендикуляра равна a). С прямой совместим ось y так, чтобы ток протекал в ее положительном направлении. Тогда начало произвольного вектора элемента тока $I d\vec{l}$ имеет координату y , а его

длина равна $|I d\vec{l}| = I dy$. Этот элемент тока создает в точке M магнитную индукцию, определяемую формулой (4.2), ее абсолютная величина равна:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dy \cdot r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot dy}{r^2}. \quad (1)$$

Для любого элемента тока вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен за чертеж, поэтому для нахождения модуля результирующего поля B достаточно сложить все dB .

Из рисунка видно, что при $y > 0$:

$$y = a \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha), \quad (2)$$

а при $y < 0$:

$$y = -a \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3)$$

Последние два равенства эквивалентны, следовательно, для любого y :

$$dy = d(-a \cdot \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (4)$$

Подставляя это выражение в формулу (1) и учитывая, что $r \sin \alpha = a$, получим:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha. \quad (5)$$

Интегрирование в пределах от α_1 до α_2 дает для магнитной индукции поля, создаваемого прямолинейным участком проводника с током, выражение:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6)$$

Отсюда как частные случаи получаются формулы (4.5) для полубесконечного тока ($\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi$) и (4.4) для бесконечного ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$).

Задача 2. Ток I течет по тонкому проводнику, который имеет вид правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R . Найти магнитную индукцию в центре данного контура. Исследовать полученное выражение при $n \rightarrow \infty$.

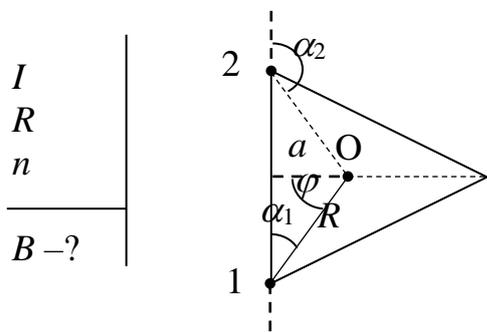


Рис. 4.2

Решение

Вектор B магнитной индукции в центре O окружности, описанной около правильного n -угольника (рис. 4.2), равен сумме одинаковых векторов B_1 , порожденных одинаковыми участками 1–2 – сторонами n -угольника:

$$\vec{B} = n \cdot \vec{B}_1. \quad (1)$$

Величину B_1 найдем, воспользовавшись результатом задачи 1 (формула 6). Из рисунка видно, что участок 1–2 является основанием равнобедренного треугольника с боковыми сторонами R и углом при вершине $2\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Следовательно, расстояние от участка с током до точки O , в которой рассчитывается магнитная индукция, равно:

$$a = R \cos \varphi = R \cos \frac{\pi}{n}. \quad (2)$$

Направление на точку O задается углами:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (2), (3), (4) в формулу (6) задачи 1, получаем:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \frac{\pi}{n}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (5)$$

Поле, созданное всеми сторонами n -угольника, согласно (1), равно:

$$B = n \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (6)$$

Для исследования случая $n \rightarrow \infty$ перепишем это выражение в виде:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}, \quad (7)$$

пределом которого при $n \rightarrow \infty$ является:

$$B_{кр} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (8)$$

Это выражение совпадает с результатом (4.6) для кругового тока (пределом n -угольника при $n \rightarrow \infty$ является окружность).

Задача 3. Найти магнитную индукцию в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на рис. 4.3. Радиус изогнутой части проводника R , прямолинейные участки очень длинные.

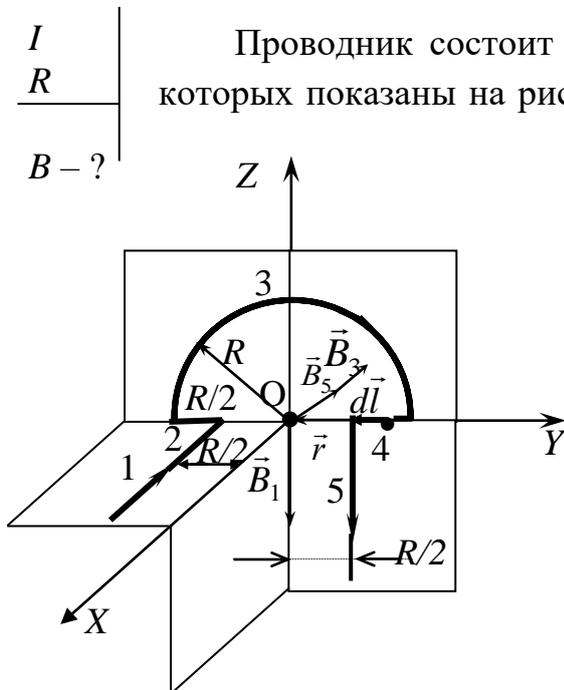


Рис. 4.3

Решение

Проводник состоит из пяти участков разного типа, номера которых показаны на рисунке. Участки 2 и 4 содержат элементы $d\vec{l}$,

образующие с радиус-вектором, проведенным в точку O , углы, равные либо 0 , либо π . Согласно закону Био–Савара–Лапласа (4.2), в таких случаях $d\vec{B} = 0$ т. е. в магнитную индукцию участки 2 и 4 вклада не дают. Рассмотрим участки 1, 3 и 5.

Участок 1 представляет собой полубесконечный прямой ток. В точке O , т. е. на расстоянии $R/2$, созданная им индукция, согласно (4.4), равна:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{R}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (1)$$

Этот вектор направлен против оси OZ . Аналогично, участок 5 создает вектор индукции такой же по величине:

$$B_5 = B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (2)$$

но направленный иначе – против оси OX .

Участок 3 представляет собой половину кругового тока. Созданная им магнитная индукция, согласно (4.6), равна:

$$B_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4R}, \quad (3)$$

а направлена против оси ОХ.

Для результирующего вектора индукции в точке О по принципу суперпозиции (4.3) получим:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_5. \quad (4)$$

Учитывая, что векторы \vec{B}_3 и \vec{B}_5 направлены одинаково, а \vec{B}_1 им перпендикулярен, для модуля результирующего вектора получим:

$$B = \sqrt{B_1^2 + (B_3 + B_5)^2}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражения (1), (2), (3), после преобразований получаем:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} \sqrt{2 + \pi + \frac{\pi^2}{4}}. \quad (6)$$

Задача 4. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого током, равномерно распределенным по плоскости с линейной плотностью \vec{i} .

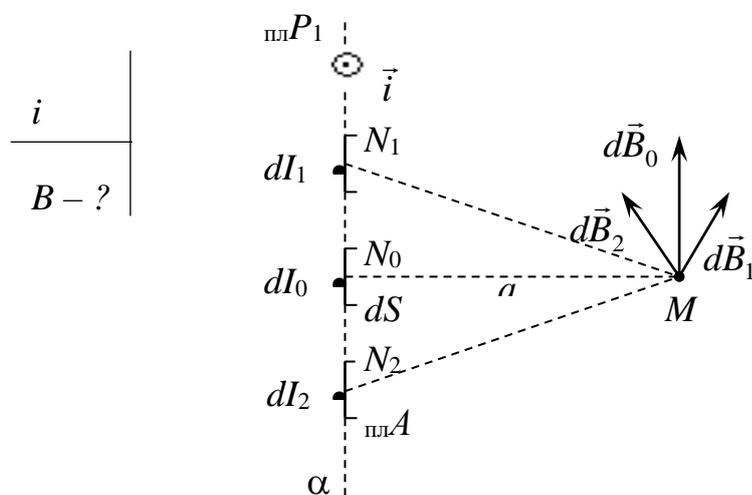


Рис. 4.4

Решение

Чтобы найти магнитную индукцию в произвольной точке М (рис. 4.4) на некотором расстоянии a от плоскости с током P_1 , опустим из M на P_1 перпендикуляр MN_0 . Через его основание —

точку N_0 – проведем прямую α , перпендикулярную вектору линейной плотности тока \vec{i} , через эту прямую и точку M построим плоскость A , перпендикулярную плоскости P_1 (рис. 4.4 дан в плоскости A).

В окрестности точки N_0 выделим бесконечную полоску ширины dS , идущую вдоль вектора \vec{i} – бесконечный прямой ток величины $dI_0 = idS$. Этот ток порождает магнитную индукцию $d\vec{B}_0$, направленную (согласно правилу правого винта) перпендикулярно отрезку MN_0 , т. е. параллельно прямой α . Выбрав симметрично точке N_0 точки N_1 и N_2 и выделив бесконечно малые прямые токи $dI_1 = dI_2 = dI_0 = idS$, построим для них векторы $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$, равные друг другу по величине и расположенные симметрично вектору $d\vec{B}_0$. Их векторная сумма направлена вдоль $d\vec{B}_0$. Вся плоскость состоит из аналогичных полосок (бесконечных прямых токов dI_k , $k = 0, 1, 2 \dots \infty$), и индукция ее магнитного поля может быть, согласно принципу суперпозиции, получена как сумма магнитных индукций $d\vec{B}_k$ этих токов:

$$\vec{B} = \sum_{k=0}^{\infty} d\vec{B}_k. \quad (1)$$

Результирующий вектор \vec{B} направлен параллельно прямой α .

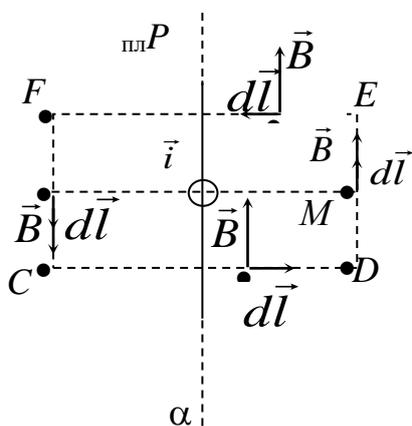


Рис. 4.5

Очевидно, его величина не изменяется при смещении точки M вдоль плоскости P_1 , а может зависеть только от расстояния a . Это позволяет не применять непосредственно закон Био–Савара–Лапласа и принцип суперпозиции (что довольно громоздко), а использовать теорему о циркуляции вектора магнитной индукции (4.7).

На рис. 4.5 указан прямоугольный контур CDEF со стороной $DE = h$. В некоторых точках контура построены векторы магнитной индукции \vec{B} и элемента контура $d\vec{l}$. Очевидно, что

циркуляция \vec{B} по отрезкам CD и EF равна нулю (здесь $\vec{B} \perp d\vec{l}$), а по отрезкам DE и FC – равна:

$$\tilde{A}_{DE} = \tilde{A}_{FC} = B \cdot h. \quad (2)$$

Ток, охваченный контуром, равен:

$$I = i \cdot h, \quad (3)$$

По теореме о циркуляции запишем:

$$\oint_{CDEF} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 I, \quad (4)$$

или

$$2 \cdot B \cdot h = \mu_0 i h, \quad (5)$$

откуда окончательно для поля всей плоскости:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}. \quad (6)$$

Как видно, величина индукции магнитного поля не зависит также от расстояния до плоскости. Напомним, электрическое поле равномерно заряженной бесконечной плоскости также не зависит от расстояния до плоскости.

Задача 5. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого токами, равномерно распределенными по двум параллельным плоскостям с линейными плотностями \vec{i} и $-\vec{i}$.

Решение

На рис. 4.6 изображены плоскости P_1 P_2 , по которым токи с одинаковой по величине линейной плотностью i текут в противоположных направлениях. В точке M , расположенной между плоскостями, векторы индукции \vec{B}_1 (от плоскости P_1) и \vec{B}_2 (от плоскости P_2) направлены одинаково. Их сумма равна:

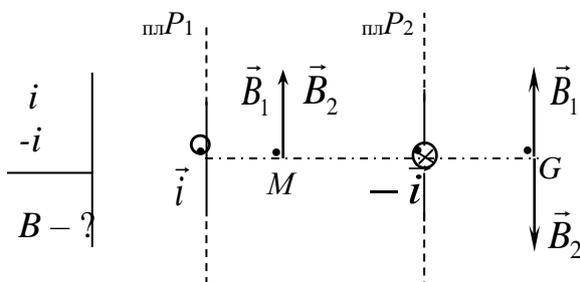


Рис. 4.6

$$B = 2B_1 = 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{2} = \mu_0 i. \quad (7)$$

В точке G вне плоскостей из-за противоположной ориентации \vec{B}_1 и \vec{B}_2 их сумма равна нулю:

$$\vec{B} = 0. \quad (8)$$

Аналогичный результат получается при расчете индукции электростатического поля, созданного двумя параллельными бесконечными плоскостями, заряженными разноименными зарядами с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$.

Векторы индукции электростатического поля, созданные каждой плоскостью, в пространстве между ними одинаково направлены, и поля взаимно усиливаются: $D = 2D_1 = 2 \cdot \frac{\sigma}{2} = \sigma$. Вне плоскостей поля взаимно компенсируются.

Задача 6. Два длинных прямых взаимно перпендикулярных провода отстоят друг от друга на расстояние a . В каждом проводе течет ток I . Найти максимальное значение силы Ампера на единицу длины провода в этой системе.

Решение

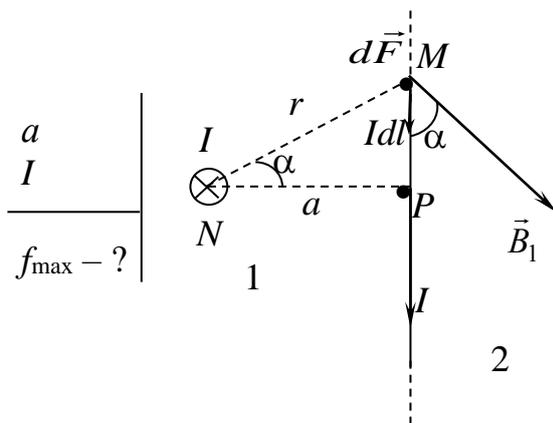


Рис. 4.7

Предложенная конфигурация изображена на рис. 4.7: проводник 2 лежит в плоскости рисунка, проводник 1 перпендикулярен ей и пересекается с этой плоскостью в точке N . Отрезок NP перпендикулярен проводнику 2 и, по условию, длина его равна a . Из произвольной точки M , взятой на втором проводнике (ее положение определяется углом $\angle MNP = \alpha$) построим элемент тока $Id\vec{l}$. На него в поле, созданном первым проводником, действует сила Ампера $d\vec{F}$:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}_1]. \quad (1)$$

Здесь \vec{B}_1 – вектор магнитной индукции поля первого проводника, направленный перпендикулярно вектору \vec{r} и равный:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2)$$

Модуль силы:

$$dF = |d\vec{F}| = IB_1 dl \sin \alpha = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \sin \alpha \cdot dl. \quad (3)$$

На единицу длины приходится сила:

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha}{2\pi r}. \quad (4)$$

В треугольнике MNP :

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad (5)$$

что после подстановки в выражение (4) дает:

$$f = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \sin 2\alpha. \quad (6)$$

Эта величина максимальна при $\alpha = \pi/4$, тогда $\sin 2\alpha = 1$, и равна:

$$f_{\max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}. \quad (7)$$

Если направление тока в одном из проводников изменить на противоположное, то угол между векторами $I d\vec{l}$ и \vec{B}_1 окажется равным $\pi - \alpha$. Это повлечет за собой изменение направления силы Ампера $d\vec{F}$, но не повлияет на ее величину: формула (7) останется справедливой. Изменение направления токов в обоих проводниках не меняет ни величины, ни направления силы.

Задача 7. Заряд q равномерно распределен по объему однородного непроводящего шара радиуса R , который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Найти магнитный момент шара.

Решение

q	
R	
ω	
$p_m - ?$	

Сферически симметрично заряженное тело можно представить в виде набора колец. Вращаясь, они механически переносят заряды по окружностям, создавая круговые токи, текущие в параллельных плоскостях. Их магнитные моменты различны по величине, но направлены одинаково – по оси

вращения в направлении, связанном с током правилом правого винта. Складываясь, они дают суммарный магнитный момент всего тела, направленный так же.

Сила тока $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, где Δq – заряд, перенесенный через сечение за время Δt . В данном случае $\Delta q = q_k$ – заряд кольца, $\Delta t = T$ – период обращения, за который этот заряд полностью переносится через перпендикулярное кольцу сечение. Тогда:

$$I = \frac{q_k}{T} = \frac{\omega}{2\pi} q_k. \quad (1)$$

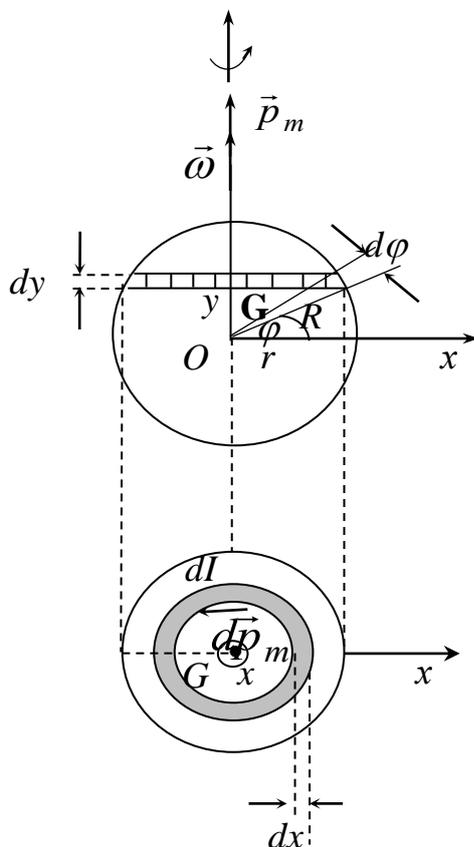


Рис. 4.8

На рис. 4.8 вверху дано меридиональное сечение шара. Рассмотрим слой, перпендикулярный оси вращения ou , на расстоянии y от центра, имеющий бесконечно малую толщину dy и радиус r . Линейные величины удобно выразить через угловые:

$$r = R \cos \varphi, \quad (2)$$

$$y = R \sin \varphi, \quad (3)$$

$$dy = R \cos \varphi d\varphi, \quad (4)$$

где φ – широтный угол, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $d\varphi$ – его малое приращение. Этот слой, имеющий форму диска, можно представить, как изображено на рис. 4.8

внизу, в виде совокупности колец радиуса x и ширины dx , $0 < x < r$. Объем кольца:

$$dV = 2\pi x dx dy, \quad (5)$$

его заряд:

$$dq = \rho \cdot dV. \quad (6)$$

Здесь ρ – объемная плотность заряда шара, равная:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (7)$$

Вращаясь, кольцо создает ток, величина которого, согласно (1), равна:

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} dq. \quad (8)$$

Магнитный момент этого тока равен (4.11):

$$dp_m = S dI = \pi x^2 dI. \quad (9)$$

Учитывая формулы (5)–(9), получим для элементарного вклада, который дает малое кольцо в общий магнитный момент шара:

$$dp_m = \pi R \rho \omega \cos \varphi x^3 dx d\varphi. \quad (10)$$

Интегрируя по верхнему полушарию и удваивая результат (вклады верхнего и нижнего полушарий одинаковы), получаем:

$$\begin{aligned} p_m &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} [\pi R \rho \omega \cos \varphi \int_0^{R \cos \varphi} x^3 dx] d\varphi = \\ &= 2\pi R \rho \omega \int_0^{\pi/2} \frac{(R \cos \varphi)^4}{4} \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{15} \pi R^5 \rho \omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя p по формуле (7), окончательно получаем:

$$p_m = \frac{q\omega R^2}{5}. \quad (12)$$

Задача 8. Укрепленную на конце коромысла весов небольшую катушку K с числом витков $N = 200$ поместили в зазор между полюсами магнита, как показано на рисунке. Площадь сечения катушки $s = 1 \text{ см}^2$, длина плеча OA коромысла $l = 30 \text{ см}$. В отсутствие тока через катушку весы уравновешены. После того, как через катушку пустили ток $I = 22 \text{ мА}$, для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на $\Delta m = 60 \text{ мг}$. Найти индукцию магнитного поля в месте нахождения катушки.

Решение

На верхней части рис. 4.9 изображена схема установки, главная часть которой – рычаг с неподвижной точкой O ; на нижнем – распределение сил и моментов сил. Ось Oz вращения рычага направим за чертеж. В отсутствие тока выполняется условие равновесия: сумма проекции на ось Oz моментов сил тяжести катушки m_1g и чаши с грузом

$$\begin{aligned} N &= 200 \\ s &= 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2 \\ l &= 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м} \\ I &= 22 \text{ мА} = 0,022 \text{ А} \\ \Delta m &= 60 \text{ мг} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \end{aligned}$$

$B - ?$

m_2g равна нулю:

$$m_2gl - m_1gl_1 = 0. \quad (1)$$

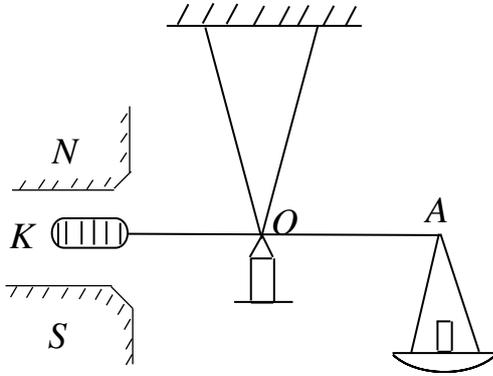
При пропускании через катушку тока I у нее появляется магнитный момент, который можно найти умножением магнитного момента одного витка (4.11) на их количество:

$$p_m = NIs. \quad (2)$$

Допустим ток в цепи протекает так, что вектор \vec{p}_m направлен влево вдоль плеча OK . Тогда при заданном направлении магнитного поля (от северного полюса N к южному S , т. е. вниз) вектор момента сил Ампера направлен против оси oz :

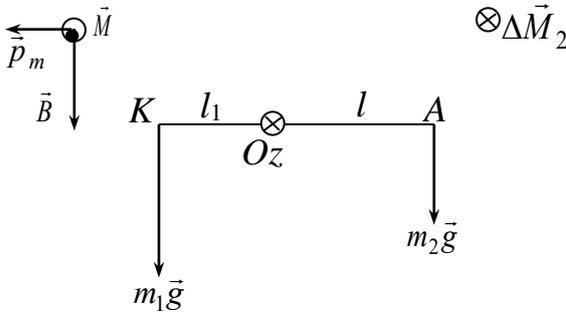
$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad M_z = -p_m B. \quad (3)$$

(Из-за малости катушки поле между полюсами магнита в ее пределах можно считать однородным). Чтобы равновесие сохранялось, необходимо



обеспечить добавочный момент сил $\Delta \vec{M}_2$, направленный по оси Oz , добавив на чашу груз массой Δm . Теперь условие равновесия имеет вид:

$$(m_2 + \Delta m)gl - m_1 gl_1 - p_m B = 0. \quad (4)$$



Вычтя из уравнения (4) уравнение (1), получим:

$$\Delta mgl - p_m B = 0, \quad (5)$$

откуда:

$$B = \frac{\Delta mgl}{p_m}. \quad (6)$$

Рис. 4.9

Подставляя выражение для p_m (2), получим окончательно:

$$B = \frac{\Delta mgl}{NI s}. \quad (7)$$

Подставляя числовые данные, получаем:

$$B = \frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot 9,8 \cdot 0,3}{200 \cdot 0,022 \cdot 10^{-4}} \approx 0,4 \text{ (Тл)}.$$

Если изменить на противоположное направление тока в катушке или поменять местами полюса магнита, то вектор момента сил Ампера окажется направлен по оси OZ . В этом случае равновесие рычага восстанавливается снятием с чаши груза массы Δm . Уравнение (4) примет вид:

$$(m_2 - \Delta m)gl - m_1 gl_1 + p_m B = 0, \quad (8)$$

это не повлияет на результат: формула (7) останется справедливой.

Задача 9. По П-образному проводнику, расположенному в горизонтальной плоскости, может скользить без трения перемычка 1–2, как изображено на рис. 4.10. Перемычка имеет длину l , массу m и сопротивление R . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B . В момент $t = 0$ на перемычку стали действовать с постоянной горизонтальной силой F , и перемычка начала перемещаться вправо. Найти зависимость ее скорости от времени. Самоиндукция и сопротивление П-образного проводника пренебрежимо малы.

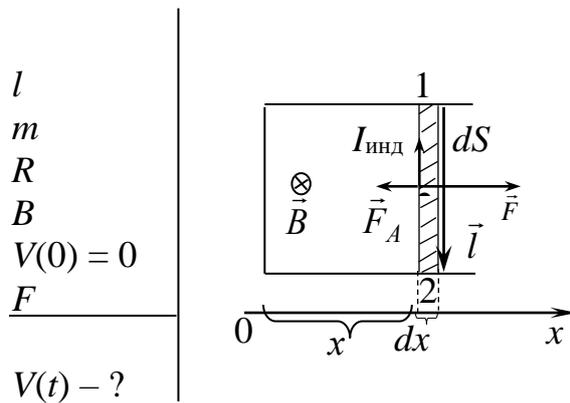


Рис. 4.10

Решение

Пусть положение перемычки задается координатой x вдоль оси, направление которой, совпадает с направлением силы \vec{F} (рис. 4.10). Движение перемычки вправо увеличивает площадь контура, который она замыкает. Вместе с этим увеличивается магнитный поток через контур. Это вызывает появление э. д. с. индукции и индукционного

тока, который своим полем, согласно правилу Ленца, должен препятствовать нарастанию магнитного потока. Следовательно, ток направлен против часовой стрелки (тогда его магнитная индукция противоположна внешней магнитной индукции \vec{B} , направленной за чертеж), т. е. по перемычке он течет от точки 2 к точке 1. Его величина равна:

$$I_{\text{инд}} = \frac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{\text{инд}}$ — абсолютное значение э. д. с. индукции, которое найдем из закона Фарадея (4.13):

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| \frac{d(BS)}{dt} \right| = B \frac{dS}{dt} = B \frac{d(lx)}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = BlV. \quad (2)$$

Во внешнем магнитном поле \vec{B} на перемычку с током $I_{\text{инд}}$ действует сила Ампера:

$$F_A = I_{\text{инд}}[\vec{l}, \vec{B}], \quad (3)$$

где вектор \vec{l} направлен от 1 к 2.

При этом сила Ампера направлена противоположно внешней силе \vec{F} . Проектируя их на ось Ox , запишем уравнение движения перемычки:

$$m \frac{dV}{dt} = F - F_A. \quad (4)$$

Получим выражение для F_A , пользуясь соотношениями (1)–(3):

$$F_A = BI_{\text{инд}}l = B \frac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} l = \frac{B^2 l^2}{R} V. \quad (5)$$

Введя обозначение $\beta = \frac{B^2 l^2}{R}$, подставим выражение для силы Ампера F_A в уравнение (4):

$$m \frac{dV}{dt} = F - \beta V. \quad (6)$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{-\beta dV}{F - \beta V} = -\frac{\beta}{m} dt. \quad (7)$$

Интегрирование с учетом начальных условий дает:

$$\ln \frac{F - \beta V}{F} = -\frac{\beta}{m} t. \quad (8)$$

После потенцирования и последующих преобразований зависимость скорости от времени примет вид:

$$V = \frac{F}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right). \quad (9)$$

После подстановки значения β :

$$V = \frac{FR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta^2 l^2}{mR}t}\right). \quad (10)$$

Заметим, что скорость экспоненциально приближается к предельному значению $V_{пред} = \frac{FR}{B^2 l^2}$.

Задача 10. Квадратная рамка со стороной b и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости, как показано на рис. 4.11. Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью V . Найти э. д. с. индукции в рамке как функцию расстояния x .

Решение

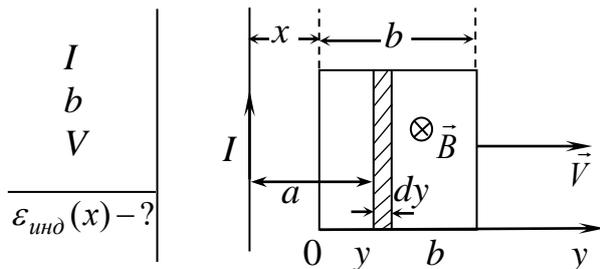


Рис. 4.11

Вектор магнитной индукции \vec{B} поля бесконечно длинного прямого проводника с током перпендикулярен чертежу (рис. 4.11) и убывает по величине по мере удаления от проводника (4.5). Поэтому магнитный поток уменьшается при удалении рамки. Как следствие, в ней

возникает э. д. с. индукции, определяемая законом Фарадея (4.13).

Для расчета потока направим ось Oy перпендикулярно проводнику с током вдоль одной из сторон рамки, совместив начало координат с ближней к току стороной. Тогда через бесконечно тонкую полоску на поверхности рамки, взятую в точке с координатой y длины b и ширины dy (на рисунке она заштрихована), проходит поток вектора индукции:

$$d\Phi = B(y) \cdot bdy. \quad (1)$$

Здесь $B(y)$ – индукция поля тока на расстоянии $a = x + y$ от него, равная (4.4):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + y)}. \quad (2)$$

Подставляя это выражение в (1) и интегрируя по всей поверхности рамки, т. е. по y от 0 до b , получаем:

$$\Phi = \int_0^b \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + y)} bdy = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right). \quad (3)$$

Магнитный поток зависит от x ; значит, для движущейся со скоростью $V = dx/dt$ рамки он зависит от времени. По закону Фарадея (4.13):

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -V \frac{d\Phi}{dx}. \quad (4)$$

Выполнив дифференцирование, после преобразований получаем:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{\mu_0 IVb^2}{2\pi x(x + b)}. \quad (5)$$

Задача 11. По двум медным гладким шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массы m (схема установки дана на рис. 4.12). К концам шин подсоединен конденсатор емкости C . Расстояние между шинами l . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти ускорение перемычки w .

Решение

α	
m	
C	
l	
B	
$w - ?$	

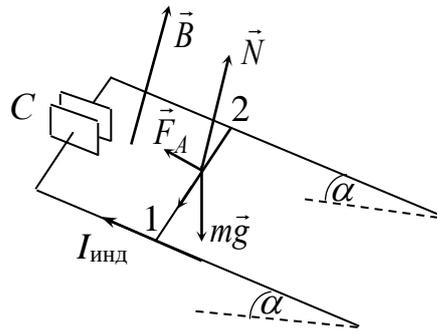


Рис. 4.12

Причина появления э. д. с. индукции в данной установке описана для аналогичной ситуации в задаче 8. Ее величина равна:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = Blv, \quad (1)$$

а порождаемый ею индукционный ток $I_{\text{инд}}$ – ток зарядки конденсатора – направлен от точки 2 к точке 1. Конденсатор как будто подключен к источнику тока, а поскольку сопротивление в цепи равно нулю, напряжение на обкладках равно э. д. с.:

Тогда положительный заряд одной из обкладок:

$$U = \varepsilon_{\text{инд}} = Blv. \quad (2)$$

Тогда положительный заряд одной из обкладок:

$$q = CU = CBlv, \quad (3)$$

а индукционный ток:

$$I_{\text{инд}} = \frac{dq}{dt} = CBl \frac{dv}{dt} = CBlw, \quad (4)$$

здесь $w = dv/dt$ – ускорение перемычки.

Протекание тока по перемычке во внешнем магнитном поле вызывает силу Ампера \vec{F}_A , направленную перпендикулярно перемычке вверх по наклонной плоскости и равную:

$$F_A = BI_{\text{инд}}l. \quad (5)$$

На перемычку действует также сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . По второму закону Ньютона:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A. \quad (6)$$

Проектируя это векторное уравнение на ось x , направленную параллельно шинам вниз, получим:

$$mw = mg \sin \alpha - F_A. \quad (7)$$

С учетом выражений (5) и (4):

$$mw = mg \sin \alpha - B^2 l^2 C w. \quad (8)$$

Отсюда после преобразований получаем для ускорения перемычки:

$$w = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{B^2 l^2 C}{m}}. \quad (9)$$

Если $B = 0$ или $C = 0$, т. е. нет условий для возникновения индукционного тока и связанной с ним силы Ампера, формула (9) дает известный результат для ускорения тела, скользящего без трения вниз по наклонной плоскости:

$$w = g \sin \alpha.$$

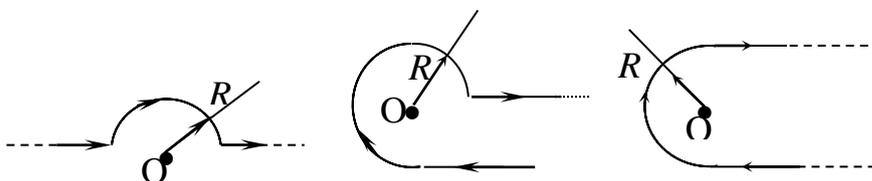
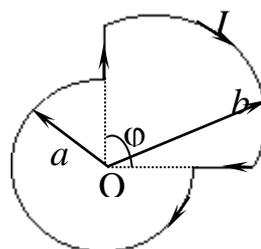
Напротив, увеличение индукции B поля или емкости C конденсатора ведет к уменьшению ускорения. В пределе, когда $\frac{B^2 l^2 C}{m} \gg 1$ $w \rightarrow 0$, т. е. в сильном магнитном поле перемычка скользит практически равномерно.

Задачи для контроля

1. Найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I , показанного на рисунке. Радиусы a и b , а также угол φ известны.

2. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет одну из конфигураций, показанных на рисунке.

Радиус изогнутой части проводника равен R , прямолинейные участки предполагаются очень длинными.

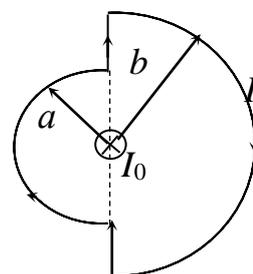


3. Длинный проводник с током $I = 5$ А изогнут под прямым углом. Найти магнитную индукцию в точке, которая отстоит от плоскости проводника на расстояние $l = 35$ см и находится на перпендикуляре к проводникам, проходящем через точку изгиба.

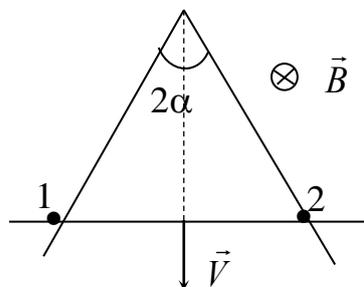
4. Непроводящий тонкий диск радиуса R , равномерно заряженный с поверхностной плотностью σ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти:

- индукцию магнитного поля в центре диска;
- магнитный момент диска.

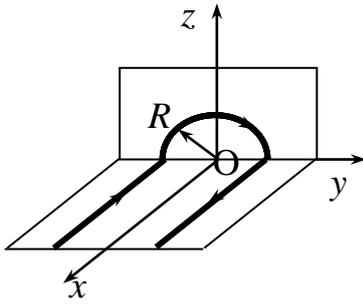
5. Замкнутый контур с током I находится в поле длинного проводника с током I_0 . Плоскость контура перпендикулярна прямому проводнику. Найти момент сил Ампера, действующих на этот контур, если он имеет вид, показанный на рисунке. Радиусы a и b известны.



6. Прямой провод с сопротивлением R_1 на единицу длины согнут под углом 2α , как показано на рисунке. Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно биссектрисе угла 2α , образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярное к его плоскости. Найти направление и силу тока I , текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью V . Сопротивлением в местах контактов 1 и 2 пренебречь.



Задачи для самостоятельного решения



1. По круговому витку радиуса $R = 100$ мм из тонкого провода циркулирует ток $I = 1$ А. Найти магнитную индукцию: а) в центре витка; б) на оси витка в точке, отстоящей от его центра на $x = 100$ мм.

Ответ: а) $B = \frac{\mu_0 I}{2R} = 6,3$ мкТл;

б) $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = 2,3$ мкТл.

2. Найти индукцию магнитного поля в центре контура, имеющего вид прямоугольника, если его диагональ $d = 16$ см, угол между диагоналями $\varphi = 30^\circ$ и ток в контуре $I = 5$ А.

Ответ: $B = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \varphi} = 0,1$ мТл.

3. Найти магнитную индукцию в точке О, если проводник с током $I = 8$ А имеет вид, показанный на рисунке. Радиус изогнутой части проводника $R = 100$ мм, прямолинейные участки очень длинные.

Ответ: $B = \sqrt{4 + \pi^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = 0,3$ мкТл.

4. Непроводящая сфера радиуса $R = 50$ мм, заряженная равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 10$ мкКл/м², вращается с угловой скоростью $\omega = 70$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр. Найти магнитную индукцию в центре сферы.

Ответ: $B = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R = 29$ пТл.

5. Найти модуль и направление силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током $I = 8$ А в точке O , если проводник имеет одну

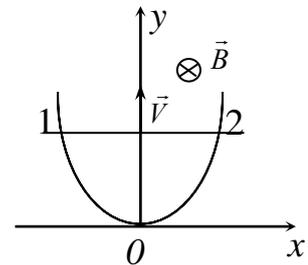


из конфигураций, показанных на рисунке:

$R = 10$ см; $l = 20$ см; параллельные участки – бесконечно длинные.

Ответ: а) $F_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 0,2$ мН/м; б) $F_1 = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l} = 0,13$ мН/м.

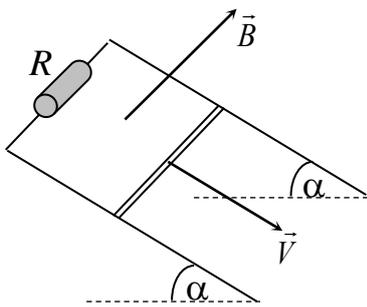
6. Провод, имеющий форму параболы $y = kx^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией B . Из вершины параболы в момент $t = 0$ начали перемещать перемычку. Найти э. д. с. индукции в образовавшемся контуре как функцию y , если перемычку перемещают:



- а) с постоянной скоростью V ;
 б) с постоянным ускорением a , причем в момент $t = 0$ скорость перемычки была равна нулю.

Ответ: а) $\varepsilon_{\text{инд}} = 2BV \sqrt{\frac{y}{k}}$; б) $\varepsilon_{\text{инд}} = By \sqrt{\frac{8a}{k}}$.

7. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массы m . Шины замкнуты на сопротивление R . Расстояние между шинами l . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти установившуюся скорость перемычки (шины считать достаточно длинными).



Ответ: $V = \frac{mg \cdot R \sin \alpha}{B^2 l^2}$.

VIII. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

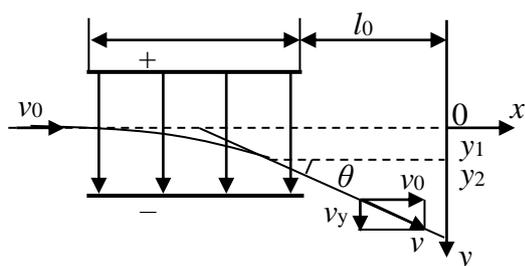
Изучая движение различных заряженных частиц в электрических и магнитных полях, можно определить отношение e/m и таким образом получить информацию о природе самих частиц и о тех процессах, в которых они возникают. Воздействуя на потоки электронов и ионов электрическими и магнитными полями, можно управлять этими потоками. Это лежит в основе действия практически всех электронных приборов (осциллографов, электронных микроскопов, ускорителей и т. д.).

Если частица, обладающая зарядом q , движется в пространстве, где имеется электрическое поле напряженностью \vec{E} и магнитное поле индукцией \vec{B} , то уравнение ее движения имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}]. \quad (\text{A})$$

В общем случае решение этого уравнения представляет некоторые трудности. Поэтому рассмотрим только несколько частных случаев.

§ 42. Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле



Пусть положительно заряженная частица, двигавшаяся со скоростью v_0 вдоль оси Ox (система координат выбрана как показано на рисунке), попадает в электрическое поле плоского конденсатора. Поле конденсатора будем считать однородным. Тогда:

$$\vec{B} = 0, \quad E_x = E_z = 0, \quad E_y = E.$$

В этом случае уравнение (A) сводится к двум скалярным уравнениям:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad m \frac{dv_y}{dt} = qE,$$

из которых следует, что $v_x = const = v_0$, $v_y = \frac{q}{m}Et + const$ (аналогия с движением тела, брошенного горизонтально), при $t = 0$: $v_y(0) = 0$, откуда следует, что $const = 0$, окончательно получим:

$$v_y = \frac{q}{m}Et.$$

Это решение имеет место только в процессе движения заряженной частицы между обкладками конденсатора, т. е. для времени $0 \leq t \leq \frac{L}{v_0}$; где L – длина пластин конденсатора. На выходе из конденсатора составляющие скорости частицы будут иметь значения: $v_x = v_0$, $v_y^{\max} = \frac{q}{m}Et_{\max} = \frac{q}{m}E\frac{L}{v_0}$.

Легко найти угол отклонения частицы от направления первоначального движения:

$$tg\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y^{\max}}{v_x} = \frac{q}{m} \frac{LE}{v_0^2}.$$

Таким образом, угол отклонения существенно зависит от величины удельного заряда. Различные частицы в одном и том же поле отклоняются по-разному, что позволяет разделять частицы, пропуская пучки, состоящие из различных частиц, через однородное электрическое поле.

Найдем смещение частицы относительно точки O , т. е. точки, в которую она бы попала в отсутствие поля.

В процессе движения между пластинами на частицу все время действует сила, чтобы найти смещение на выходе из конденсатора проинтегрируем v_y по времени, учитывая, что:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{q}{m}Et,$$

найдем:

$$y_1 = \frac{q}{m} \int_0^{L/v_0} E t dt = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \frac{L^2}{v_0^2}.$$

Далее, после выхода из конденсатора, частица движется равномерно, ее смещение вдоль оси y определяется величиной y – составляющей скорости на выходе из области действия поля v_y^{\max} : $y_2 = v_y^{\max} t_1$, где $t_1 = \frac{l_0}{v_0}$ – время движения частицы от границы поля до экрана, l_0 – расстояние от границы поля до экрана. Подставляя значения v_y^{\max} и t_1 , получим:

$$y_2 = v_y^{\max} t_1 = \frac{q}{m} E \frac{L l_0}{v_0^2}.$$

Здесь учтен тот факт, что x – составляющая скорости частицы в процессе движения не изменяется.

Тогда полное смещение частицы будет равно:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \frac{L^2}{v_0^2} + \frac{q}{m} E \frac{L l_0}{v_0^2} = \frac{q}{m} E \frac{L}{v_0^2} \left(\frac{1}{2} L + l_0 \right),$$

или

$$y = \left(\frac{1}{2} L + l_0 \right) \operatorname{tg} \theta,$$

т. е. частицы летят так, как если бы источник частиц находился в центре конденсатора и вылетали бы они под углом θ к первоначальному направлению скорости движения частиц.

§ 43. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

Рассмотрим другой частный случай, когда нет электрического поля, но есть магнитное с индукцией B . Пусть частица, имеющая скорость v_0 , попадает в однородное магнитное поле, перпендикулярное к скорости частицы. Уравнение движения будет иметь вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v}_0 \cdot \vec{B}].$$

Так как действующая сила перпендикулярна к скорости, она не совершает работы и, следовательно, не изменяет величины скорости, изменяется только ее направление. Следовательно, величина силы $F = qv_0B$ остается постоянной. Действием этой силы обусловлено центростремительное ускорение. Уравнение движения принимает вид:

$$m \frac{v_0^2}{R} = qv_0B,$$

т. е. частица движется по окружности, радиус которой легко определить из уравнения движения:

$$R = \frac{mv_0}{qB} = \frac{v_0}{\frac{q}{m}B}.$$

Характерная особенность рассматриваемого движения состоит в том, что период обращения частицы по траектории не зависит от скорости ее движения (следовательно, от энергии и от радиуса траектории):

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{mv_0}{v_0 qB} = \frac{2\pi}{\frac{q}{m}B}.$$

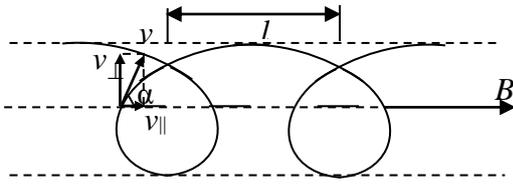
Частота

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m}B$$

называется циклотронной частотой частицы. И период, и частота зависят только от типа частиц и индукции магнитного поля.

Легко понять характер движения частицы и в том случае, когда ее скорость направлена под произвольным углом к вектору магнитной индукции в однородном магнитном поле. В силу принципа независимости движений, скорость частицы можно разложить на две составляющие: продольную

$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha$ – вдоль поля и поперечную $v_{\perp} = v_0 \sin \alpha$ – перпендикулярную составляющую скорости к магнитному полю.



На частицу действует сила Лоренца, обусловленная поперечной составляющей скорости v_{\perp} , которая заставляет ее двигаться по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной к полю, радиус этой окружности, как показано выше:

$$R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\frac{q}{m} B}.$$

Так как сила, действующая на частицу, движущуюся вдоль поля, равна нулю, то продольная составляющая скорости v_{\parallel} с течением времени не меняется. Траектория результирующего движения представляет собой винтовую линию (спираль), шаг которой определяется смещением частицы вдоль магнитного поля за время полного оборота вокруг перпендикулярного направления, а радиус – совпадает с найденным выше радиусом окружности:

$$l = v_{\parallel} T = \frac{2\pi v_0 \cos \alpha}{\frac{q}{m} B}.$$

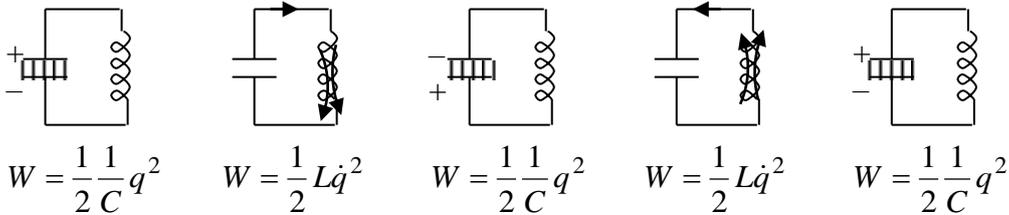
Рассмотренные частные случаи движения позволяют качественно понять характер движения частицы и в общем случае.

Используя законы движения частиц в электрическом поле, Милликен, в 1909 г., определил заряд электрона. Законы движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях положены в основу работы электронно-лучевых трубок, масс-спектрографов, датчиков Холла, всех ускорителей – приборов для изучения элементарных частиц, в частности и Большого адронного коллайдера, самой крупной экспериментальной установки в мире, на котором был открыт бозон Хиггса – первокирпичик строения материи.

IX. Электрические колебания

§ 44. Свободные колебания в контуре

Цепь, содержащая индуктивность и емкость, называется колебательным контуром, поскольку в такой цепи могут возникать электрические колебания.



Колебательный процесс в контуре можно вызвать двумя способами: либо сообщив обкладкам конденсатора заряд, т. е. создав между ними электрическое поле, либо возбудив ток в катушке индуктивности. Пусть в начальный момент времени обкладкам конденсатора был сообщен заряд $\pm q$. В зазоре между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле с энергией $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$. Если замкнуть конденсатор на индуктивность, он начнет разряжаться, и в контуре потечет ток, который обусловлен электрическим полем конденсатора. Энергия электрического поля при этом будет уменьшаться. Возрастающий ток через индуктивность создаст магнитное поле, энергия которого равна $W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L\dot{q}^2$. Так как контур идеальный $R = 0$, энергия будет сохраняться. В момент, когда напряжение на конденсаторе будет равно нулю, т. е. будет равна нулю энергия электрического поля, энергия магнитного поля будет максимальна, $I = I_{\max}$. В дальнейшем ток будет уменьшаться, при этом возникнет поддерживающая его э. д. с. самоиндукции, конденсатор начнет заряжаться. Когда заряд достигнет первоначальной величины q , ток станет равным нулю, все повторится в обратном направлении, и контур возвратится в исходное состояние. Последовательность этих превращений схематически представлена на последнем рисунке. Можно провести аналогию между электрическими колебаниями в контуре и механическими колебаниями груза на пружине, подробно рассмотренного в курсе механики. Найдем период колебаний в рассмотренном контуре. Запишем закон Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

С учетом того, что в рассматриваемом контуре

$$R = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -q/C, \quad \mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

подставляя все в предыдущее уравнение, получим:

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt},$$

или, учитывая, что сила тока есть производная заряда по времени

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, -$$

это уравнение свободных гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Решение уравнения имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где ω_0 – собственная частота контура.

Период колебаний заряда на обкладках конденсатора в рассматриваемом колебательном контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

определяется формулой Томсона.

Найдем напряжение на обкладках конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

и ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

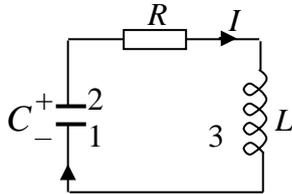
Здесь $I_m = \omega_0 q_m$ и $U_m = q_m / C$ – амплитудные значения тока и напряжения в контуре.

Напряжение на конденсаторе отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от тока.

Легко найти связь между амплитудными значениями тока и напряжения в контуре:

$$U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

§ 45. Свободные затухающие колебания



или

В реальном контуре всегда есть отличное от нуля активное сопротивление. Тогда:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_S,$$

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}.$$

Учитывая, что сила тока есть первая производная заряда по времени, и выполнив простые преобразования, получим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введя обозначения $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, будем иметь:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Это уравнение аналогично уравнению затухающих механических колебаний. В условиях, когда возможен колебательный процесс, т. е.

$\beta^2 < \omega_0^2$, $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, решение имеет стандартный вид:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_0.$$

Заметим, что частота затухающих колебаний меньше частоты свободных гармонических колебаний в контуре.

При $R=0$ это решение совпадает с предыдущим. Напряжение на обкладках конденсатора есть

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Дифференцируя заряд и выполняя элементарные преобразования, с учетом того, что $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, найдем силу тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right] \omega_0.$$

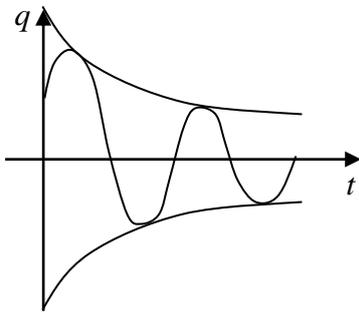
Введем угол ψ :

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}; \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}.$$

Тогда ток можно записать в виде:

$$I = \omega_0 q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi).$$

Поскольку $\cos \psi < 0$, $\sin \psi > 0$, разность фаз между током и напряжением определяется следующим неравенством $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$. Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления R , отставание напряжения от силы тока определяется углом ψ и становится больше $\frac{\pi}{2}$. Из приве-



денных выражений видно, что через время $\tau = \frac{1}{\beta}$ колебания в контуре практически затухают.

График зависимости заряда на обкладках конденсатора от времени имеет вид, представленный на рисунке.

Полученные результаты показывают, что при наличии в колебательном контуре активного сопротивления R колебания становятся затухающими, поскольку энергия, запасенная в контуре, расходуется на нагревание, т. е. переходит во внутреннюю энергию активного сопротивления.

Для характеристики электрического колебательного контура используют следующие параметры: логарифмический декремент затухания, добротность и критическое сопротивление. Рассмотрим их более подробно.

Для характеристики скорости затухания ведем логарифмический декремент затухания как логарифм натуральный отношения амплитудных значений через период:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T.$$

В курсе механики было показано, что логарифмический декремент затухания численно равен обратному числу колебаний, в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Введя время релаксации $\beta = \frac{1}{\tau}$ — время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз, получим $\lambda = T/\tau = 1/N_e$.

Учитывая, что $\beta = R/2L$, $T = 2\pi/\omega$ – условный период затухающих колебаний, для логарифмического декремента затухания будем иметь $\lambda = \frac{\pi R}{L\omega}$, откуда видно, что λ – характеристика контура. В случае, когда $\beta^2 \ll \omega_0^2$, т. е. слабого затухания, логарифмический декремент затухания может быть записан в виде: $\lambda = \pi R \sqrt{C/L}$.

Введем еще одну характеристику контура – добротность, которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{L\omega}{R}.$$

Q тем больше, чем больше N_e , т. е. чем меньше затухание в контуре. В случае слабого затухания получим:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность можно определить и иначе:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – энергия, запасенная в контуре в данный момент времени, ΔW – потери энергии за один период колебаний.

В случае малого затухания частоту можно разложить в ряд

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\omega_0^2} + \dots \right),$$

при $\beta \ll \omega_0$, $\omega \cong \omega_0$, т. е. при $\frac{R}{2L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$ частота затухающих колебаний близка к частоте собственных колебаний в контуре.

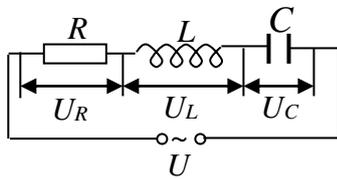
В случае $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$, частота будет мнимой $\omega' = i\omega$, и процесс станет аperiодическим. Период колебаний в случае выполнения равенства в написанном выше соотношении становится бесконечно большим $T \rightarrow \infty$, вместо колебаний будем иметь монотонный разряд конденсатора. Соответствующее сопротивление называется критическим

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

откуда:

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

§ 46. Вынужденные электрические колебания



В механике было показано, что для того, чтобы вызвать в системе вынужденные колебания, нужно компенсировать потери энергии, т. е. оказывать на нее периодическое внешнее воздействие. Это можно сделать, подавая в цепь, содержащую активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C переменное напряжение:

$$U = U_m \cos \omega t.$$

Из закона Ома следует:

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t.$$

Поступая, как и в предыдущем случае, получим:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t,$$

где, как и раньше, $\omega_0^2 = 1/LC$; $2\beta = R/L$.

По форме это уравнение совпадает с уравнением для вынужденных колебаний механической системы. Частное решение имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (\text{A})$$

здесь:

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad \text{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Индуктивность L играет в вынужденных колебаниях в колебательном контуре такую же роль, как масса в механических колебаниях.

Подставив ω_0 и β , получим:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\text{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Для получения общего решения необходимо добавить еще общее решение однородного уравнения (уравнения затухающих колебаний):

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha); \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Однако через время $\tau = 1/\beta$, как указано ранее, оно практически затухнет, таким образом, установившиеся колебания величины заряда будут описываться формулой (A). По аналогии с предыдущим легко найти выражение для силы тока:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Здесь мы ввели угол $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$.

Используя амплитудное значение величины заряда, легко найти амплитудное значение силы тока:

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Исходное уравнение можно представить в виде суммы падений напряжений на элементах контура:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t.$$

Тогда $U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi)$ – падение напряжения на активном сопротивлении.

Для емкости можно написать:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}.$$

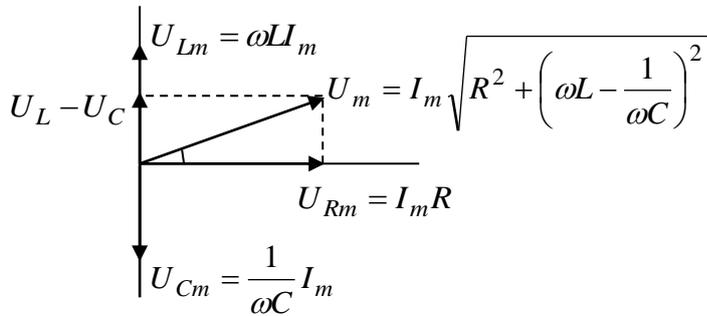
Аналогично для индуктивности:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_{Lm} = \omega LI_m.$$

Эти соотношения показывают, что напряжение на емкости отстает по фазе от силы тока на $\frac{\pi}{2}$, а на индуктивности опережает его на $\frac{\pi}{2}$.

Соотношение между током и напряжением можно представить в виде векторной диаграммы. При этом складывающиеся колебания представля-



ются в виде векторов, углы между которыми определяются начальными фазами, а модули векторов задаются амплитудными значениями напряжений на соответствующем элементе цепи. В соответствии с этим

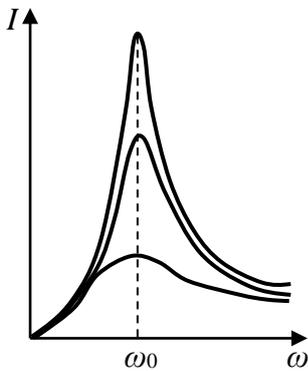
амплитуда напряжения в цепи определяется как модуль векторной суммы трех указанных векторов. Выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

называется полным электрическим сопротивлением цепи или импедансом.

В цепи с вынужденными колебаниями возможно явление резонанса.

(Напомним, что резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты внешнего напряжения). Поскольку законы изменения токов и напряжений различаются, то и принято говорить о резонансе токов и напряжений.

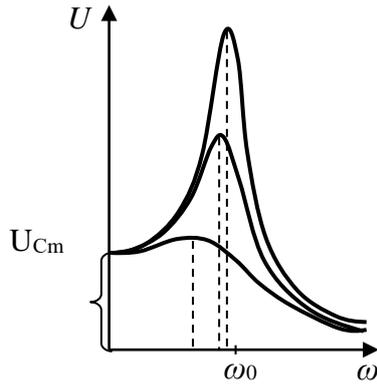


Максимальное значение силы тока наблюдается при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, т. е. резонансная частота для тока совпадает с собственной частотой контура.

Таким образом, для тока:

$$\omega_{\text{рез}}^I = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При $\omega = 0$, $I = 0$, так как постоянный ток не может течь через конденсатор.



Резонанс напряжения и резонанс заряда совпадают по частоте, поскольку имеют одинаковые частотные зависимости. Рассмотрение проведем для заряда:

$$q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Из условия максимума q_m получим:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \right] = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0.$$

Откуда легко найти соответствующие резонансные частоты:

$$\omega_{рез}^q = \omega_{рез}^U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Амплитудное значение напряжения тем больше и пик уже, чем меньше коэффициент затухания β (см. рисунок). При стремлении частоты к нулю все кривые сходятся в одной точке, отсекая на оси напряжений отрезок U_{Cm} , равный напряжению на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного тока напряжением U_m .

§ 47. Переменный ток

Переменным током называется ток, который периодически меняется по величине и направлению. Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи с активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C переменного тока, обусловленного переменным напряжением, которое можно получить от генератора переменного напряжения, принцип действия которого основан на явлении электромагнитной индукции:

$$U = U_m \cos \omega t.$$

Ток в цепи меняется по закону:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Написанное соотношение называется законом Ома для цепи переменного тока. Выражение

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2},$$

как указано выше, определяет полное электрическое сопротивление цепи и называется импедансом.

Из приведенных соотношений следует, что ток отстает по фазе от напряжения на угол φ , который зависит от параметров цепи и частоты внешнего напряжения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Если цепь содержит только активное сопротивление R , будем иметь:

$$IR = U_m \cos \omega t, \quad I_m = \frac{U_m}{R}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

Откуда видно, что при наличии в цепи переменного тока только активного сопротивления ток совпадает по фазе с напряжением.

Если цепь содержит только индуктивность L ($R=0$, $C \rightarrow \infty$), из закона Ома получим:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}.$$

$X_L = \omega L$ называется реактивным индуктивным сопротивлением. Ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$ (так как $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Из выражения для реактивного индуктивного сопротивления видно, что оно обращается в ноль при $\omega = 0$, т. е. индуктивность не оказывает сопротивления постоянному току.

Когда цепь содержит только емкость C : ($R = 0$, $L = 0$):

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C},$$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление. Ток через конденсатор опережает напряжение на угол $\frac{\pi}{2}$ (так как $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$). При $\omega = 0$ емкостное сопротивление становится бесконечно большим, постоянный ток через конденсатор течь не может, поскольку наличие конденсатора, по сути, обозначает разрыв цепи.

При конечной емкости $C \neq 0$ и отличной от нуля индуктивности $L \neq 0$, но равном нулю активном сопротивлении $R = 0$ ток определяется соотношением:

$$I_m = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|},$$

где $X = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = |X_L - X_C|$ – реактивное сопротивление, или реактанс.

Всякая цепь всегда содержит активное сопротивление, индуктивность и емкость. Рассмотренные выше частные случаи обозначают, что в конкретных условиях теми или иными параметрами можно пренебречь.

§ 48. Мощность в цепи переменного тока

Пусть в рассмотренной выше R , L , C цепи действует переменное напряжение. В этой цепи будет течь переменный ток. При этом в ней будет выделяться мощность, мгновенное значение которой запишется в виде:

$$P(t) = U(t)I(t) = U_m \cos \omega t I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

учитывая, что произведение косинусов можно представить в виде суммы

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

мгновенную мощность можно переписать следующим образом:

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi).$$

Для средней мощности, выделяемой за период, после усреднения получим:

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi.$$

Здесь учтено, что среднее за период значение косинуса равно нулю $\langle \cos \varphi(t) \rangle_0^T = 0$.

Сравнивая выражения для средней и мгновенной мощности видим, что мгновенная мощность колеблется вокруг среднего значения с частотой вдвое выше, чем частота напряжения. Выразим $\cos \varphi$ через параметры цепи, воспользовавшись соотношением между тригонометрическими функциями

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Откуда:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}.$$

Подставляя найденное значение косинуса в формулу для средней мощности P и учитывая закон Ома для переменного тока $U_m/Z = I_m$, получим:

$$P = \frac{RI_m^2}{2}.$$

Вспомним, что тепловая мощность, выделяемая в цепи постоянного тока, определяется соотношением $P_n = RI_n^2$. Сравнивая два последних соотношения, видим, что постоянный ток, сила которого равна $I_{эф} = I_m/\sqrt{2}$, развивает такую же мощность. Эта величина называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Иными словами, действующее значение силы тока – это такое значение силы переменного тока, которое выделяет на активном сопротивлении такую же мощность, как и постоянный ток, такой же величины. Аналогично $U_{эф} = U_m/\sqrt{2}$ – действующее значение напряжения.

Формулу для мощности в цепи переменного тока можно записать через действующие значения:

$$P = I_{эф}U_{эф} \cos \varphi,$$

$\cos \varphi$ называется коэффициентом мощности. Если в цепи отсутствуют емкость и индуктивность, $\cos \varphi = 1$, если $R=0$, то $\cos \varphi = 0$, в этом случае активная мощность в цепи не выделяется. В технике $\cos \varphi$ стремятся сделать как можно большим, этого можно добиться, оптимально распределив в цепи емкость и индуктивность так, чтобы реактанс был минимальным.

Х. Уравнения Максвелла

В предыдущих разделах было показано, что взаимодействие между заряженными частицами осуществляется через особый вид материи, который называется электромагнитным полем. Понятия электрического и магнитного полей были введены в науку М. Фарадеем в 1830 г. Д. Максвелл, в 60-х гг. XIX в. развил идеи М. Фарадея и получил уравнения, описывающие электромагнитное поле. Вся теория электромагнетизма построена на полученных Максвеллом уравнениях, которые применимы не только к постоянным, но и к переменным электромагнитным полям. Можно сказать, что эти уравнения являются фундаментом всей электродинамики, как законы Ньютона являются фундаментом всей классической механики. Далее рассмотрим уравнения Максвелла более детально.

§ 49. Вихревое электрическое поле

Рассмотрим явление электромагнитной индукции в контуре, который имеет неизменную геометрию и неподвижен, а изменение магнитного потока обусловлено изменяющейся индукцией магнитного поля. Возникновение тока в контуре может быть объяснено только появлением сторонних сил, обусловленных переменным магнитным полем. Химических и тепловых процессов не происходит, следовательно, они не могут быть причиной возникновения э. д. с. в контуре. Это не магнитные силы по природе, так как магнитные силы действуют только на движущиеся заряды. Поэтому ток может быть обусловлен только возникающим вследствие изменения магнитного поля электрическим полем. Обозначим его напряженность E_H . Возникающая при этом э. д. с. равна циркуляции напряженности этого поля вдоль контура:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_H d\vec{l}.$$

Но с другой стороны $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, а $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, тогда:

$$\oint \bar{E}_H d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} d\bar{S}.$$

Так как контур и поверхность неподвижны, можно поменять местами операции дифференцирования и интегрирования:

$$\oint \bar{E}_H d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}.$$

Воспользуемся теоремой Стокса $\left(\int_l \bar{a} d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{a} d\bar{S} \right)$.

Тогда:

$$\int_S \text{rot} \bar{E}_H d\bar{S} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S},$$

или, так как S – произвольно, из равенства интегралов следует равенство подынтегральных функций:

$$\text{rot} \bar{E}_H = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает в окружающем пространстве переменное вихревое электрическое поле E_H (контур является просто инструментом для его регистрации).

Поле \bar{E}_H существенно отличается от электростатического поля системы неподвижных зарядов \bar{E}_q . Поле \bar{E}_q потенциально, следовательно работа сил этого поля по замкнутому контуру равна нулю:

$$A = q \oint \bar{E}_q d\bar{l} = 0.$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, запишем:

$$\oint \bar{E}_q d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{E}_q d\bar{S} = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{rot} \bar{E}_q = 0.$$

Напряженность результирующего электрического поля равна, в силу принципа суперпозиции, сумме напряженностей полей \bar{E}_H и \bar{E}_q :

$$\bar{E} = \bar{E}_H + \bar{E}_q.$$

Тогда:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что электрическое и магнитное поля тесно связаны, и не имеет смысла, вообще говоря, их раздельное рассмотрение. Поэтому полученное уравнение является одним из основных уравнений теории электромагнетизма Максвелла.

Значение \bar{B} , а, следовательно, и \bar{E} , зависят от выбора системы отсчета. Поэтому всегда можно подобрать такие инерциальные системы отсчета, в которых будут отличны от нуля напряженности и электрического, и магнитного полей, будут отличны от нуля напряженности либо магнитного, либо электрического полей.

§ 50. Ток смещения

Для стационарного магнитного поля из закона полного тока

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{j} d\bar{S},$$

или

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S}, \quad \int_S \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \bar{j} d\bar{S}$$

ранее было получено:

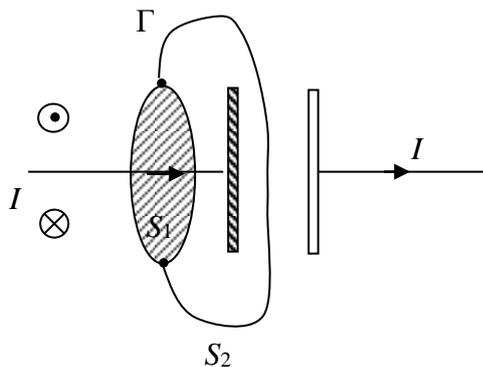
$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}. \quad (*)$$

Для плотности тока проводимости справедливо уравнение непрерывности:

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Электромагнитное поле стационарно лишь при условии, что плотность зарядов ρ и плотность тока проводимости j не зависят от времени, тогда $\operatorname{div} \bar{j} = 0$, и линии тока замкнуты.

Перейдем к изучению переменных электромагнитных полей и выясним, справедливо ли уравнение (*) в случае изменяющихся со временем полей.



Для этого рассмотрим магнитное поле, создаваемое током I , текущим в процессе зарядки конденсатора от источника постоянного напряжения. Этот ток меняется со временем, по мере возрастания напряжения между обкладками конденсатора он убывает. Линии тока проводимости между обкладками конденсатора терпят разрыв.

Рассмотрим круговой контур Γ , охватывающий ток, и проинтегрируем (*) по поверхности S_1 , ограниченной контуром:

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{j} d\bar{S},$$

или, воспользовавшись теоремой Стокса:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_1} \bar{j} d\bar{S} = I.$$

Проведем те же выкладки для поверхности S_2 , опирающейся на тот же контур Γ , но не пересекающей ток. Тогда:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \int_{S_2} \bar{j} d\bar{S} = 0.$$

Таким образом, для переменного тока уравнение (*) перестает быть справедливым. Очевидно, в этом уравнении должно присутствовать слагаемое, определяемое производными полей по времени, которое будет обращаться в ноль в случае постоянных полей и не будет влиять на полученные для них результаты.

Несправедливость уравнения (*) в случае переменных полей можно показать, исходя из общих соображений. Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (*):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{j},$$

но дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю, поэтому $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} \equiv 0$, т. е. $\operatorname{div} \bar{j} = 0$ тоже всегда, что противоречит уравнению непрерывности.

Для согласования этих уравнений Максвелл ввел в правую часть уравнения (*) дополнительное слагаемое, имеющее размерность плотности тока и назвал его током смещения. Тогда:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \bar{j}_{\text{смещ}}.$$

Плотность полного тока равна сумме плотностей тока проводимости и тока смещения:

$$\bar{j}_n = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см}}.$$

Беря дивергенцию от обеих частей последнего равенства и учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} \equiv 0$, получим:

$$\operatorname{div} \bar{j}_n = 0 = \operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \bar{j}_{\text{см}},$$

или

$$\operatorname{div} \bar{j}_{\text{см}} = -\operatorname{div} \bar{j}.$$

Учтя уравнение непрерывности для плотности тока проводимости, для плотности тока смещения, получим:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Выразим плотность тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ через величины, характеризующие поля. Вспомним, что

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho.$$

Продифференцировав обе части последнего соотношения по времени и воспользовавшись коммутативностью операций дифференцирования по координатам и времени, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{D}) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

откуда:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \text{ или } \vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t},$$

тогда:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \vec{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.$$

Термин «ток смещения» носит условный характер. Это изменяющееся со временем электрическое поле. Из всех свойств, присущих току, ток смещения обладает только одним свойством: способностью создавать магнитное поле.

Введя ток смещения, Максвелл уравнил в правах электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции следует, что изменяющееся магнитное поле создает электрическое поле, из последнего уравнения следует, что изменяющееся электрическое поле создает магнитное поле.

Выше было замечено, что линии тока проводимости в зазоре между обкладками конденсатора терпят разрыв, однако они непрерывно переходят в линии тока смещения на границах обкладок конденсатора, таким образом линии полного тока по-прежнему остаются непрерывными.

§ 51. Система уравнений Максвелла

Введение в рассмотрение тока смещения позволило Максвеллу объединить результаты исследований электрического и магнитного полей и создать единую теорию электромагнитных явлений. Теория Максвелла объяснила все известные к тому времени электромагнитные явления и предсказала новые, которые были открыты позже. В частности, из теории Максвелла следовал вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Изучение этих волн привело к созданию электромагнитной теории света.

В основу теории электромагнетизма положены уравнения Максвелла, которые в теории электромагнитных явлений, как указано выше, играют ту же роль, что в механике законы Ньютона. Таких уравнений 4.

Первую пару уравнений составляют:

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

– выражение закона электромагнитной индукции.

Из факта отсутствия в природе магнитных зарядов следует, что

$$\operatorname{div}\bar{B} = 0.$$

Вторая пара:

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

– связь между током проводимости, током смещения и порождаемым магнитным полем.

Связь между индукцией электрического поля и плотностью сторонних зарядов дает последнее уравнение

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho .$$

Эти четыре уравнения представляют собой уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Каждое из векторных уравнений эквивалентно трем скалярным. Получится 8 уравнений с 12 неизвестными, чтобы замкнуть систему, нужно записать полученную ранее связь полей, токов и зарядов, называемую материальными соотношениями. В изотропной неферромагнитной среде они имеют вид:

$$\bar{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E} ,$$

$$\bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H} ,$$

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} .$$

Все эти уравнения составляют основу электродинамики покоящихся сред.

Проинтегрировав уравнения Максвелла, получим их в интегральной форме:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} d\bar{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} d\bar{S} ,$$

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0 ,$$

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{D} d\bar{S} ,$$

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho dV .$$

§ 52. Электромагнитные волны.
Волновое уравнение для электромагнитного поля

Таким образом, мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает, вообще говоря, тоже переменное магнитное поле, оно, в свою очередь, порождает электрическое и т. д. Эти поля описываются уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho.$$

При возбуждении в некоторой точке пространства, например, с помощью колеблющихся зарядов переменного электрического поля, в окружающем пространстве возникает последовательность взаимного превращения электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс периодичен во времени и в пространстве, т. е. представляет собой волну.

Как было указано, существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Покажем это. Рассмотрим однородную нейтральную $\rho = 0$ и непроводящую $j = 0$ среду с постоянными диэлектрической $\varepsilon = \text{const}$ и магнитной $\mu = \text{const}$ проницаемостями. Используя материальные соотношения, легко получить:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \mu \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = \mu \mu_0 \operatorname{div} \bar{H},$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \bar{E}.$$

Для этого случая уравнения Максвелла записываются в виде:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0.$$

Использование материальных соотношений позволило избавиться в уравнениях от индукции электрического D и магнитного B полей.

Применим операцию rot к обеим частям I уравнения и воспользуемся коммутативностью операций дифференцирования по координатам и времени:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} = -\mu\mu_0 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{H}. \quad (*)$$

Преобразуем левую часть:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} = [\nabla[\nabla \bar{E}]] = \nabla(\nabla \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{E} - \Delta \bar{E} = -\Delta \bar{E},$$

так как $\operatorname{div} \bar{E} = 0$ и скалярный квадрат оператора Гамильтона равен оператору Лапласа $\vec{\nabla}^2 = \Delta$. Учитывая, что $\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ и подставляя все в (*), получим:

$$\Delta \bar{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \left[\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \right],$$

так как $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, окончательно последнее уравнение можно записать в виде:

$$\Delta \bar{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}.$$

Множитель перед второй производной по времени дает скорость распространения волны в среде $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$. Аналогичные преобразования третьего уравнения дадут:

$$\Delta \bar{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}.$$

Причем эти уравнения связаны друг с другом, так как получены из уравнений, содержащих одновременно векторы напряженности электрического поля \bar{E} и магнитного поля \bar{H} .

В заключение этого параграфа напомним основные понятия, характеризующие волновые процессы.

Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.

Если частицы среды колеблются вдоль направления волны – волна продольная, если поперек – поперечная.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания в момент времени t , называется фронтом волны (или волновым фронтом).

Геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе, называется волновой поверхностью.

Волновой фронт – 1, волновых поверхностей – много. Если волновая поверхность – плоскость, волна плоская. Если сфера, волна сферическая.

Расстояние λ , на которое распространяется волна за период, называется длиной волны.

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

$$\lambda \nu = v.$$

Здесь v – скорость распространения волны, T и ν соответственно ее период и частота.

Уравнение плоской волны имеет вид

$$\xi(x, t) = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right],$$

$v = \frac{dx}{dt}$ – скорость перемещения фазы, или фазовая скорость (скорость распространения волны), α – ее начальная фаза.

В симметричной форме

$$\xi(x, t) = a \cos[\omega t - kx + \alpha],$$

где $k = \frac{\omega}{v}$ – волновое число, его можно определить через длину волны

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

§ 53. Плоская электромагнитная волна

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной ($\rho = 0$), непроводящей ($j = 0$) среде с постоянными диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. Пусть волна распространяется вдоль оси x , т. е. ось x направлена перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда векторы напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей, а значит, и их проекции на оси координат, не будут зависеть от y и z . Поэтому, записав уравнения Максвелла через проекции векторов \vec{E} и \vec{H} на координатные оси, получим:

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (5) показывает, что E_x не может зависеть от времени t , а уравнение (8) – от x . Аналогично (1) и (4) для H_x . Отличные от нуля проекции E_x и H_x могут быть обусловлены только постоянными однородными полями, накладываемыми на электромагнитное поле волны. Поле волны имеет ненулевые составляющие только вдоль осей y и z . Таким образом, векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны к направлению распространения волны, откуда следует, что электромагнитные волны поперечны. В отсутствие внешних постоянных полей $E_x = H_x = 0$.

Уравнения (2), (3) и (6), (7) можно объединить в независимые группы:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (*) \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (**)$$

и

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

т. е. переменное электрическое поле, направленное вдоль оси $y - E_y$, порождает магнитное поле, направленное вдоль оси $z - H_z$, а H_z , в свою очередь $- E_y$, при этом E_z и H_y не возникают и наоборот.

Продифференцируем (*) по x и в правой части равенства поменяем порядок дифференцирования по координате и времени, пользуясь коммутативностью соответствующих операций дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

а $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ подставим из (**):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{1}{c}$, можем записать:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Аналогично для магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Это частные случаи полного волнового уравнения для волны, распространяющейся со скоростью $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Решения имеют вид:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$k = \omega/v$ – волновой вектор. Подставим написанные выражения в (*) и (**):

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Чтобы эти уравнения удовлетворялись, необходимо чтобы $\alpha_1 = \alpha_2$ и, кроме того:

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m,$$

$$kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m,$$

откуда:

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2.$$

Или

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_m = \sqrt{\mu\mu_0} H_m.$$

Если волна распространяется в вакууме ($\mu = \varepsilon = 1$), то:

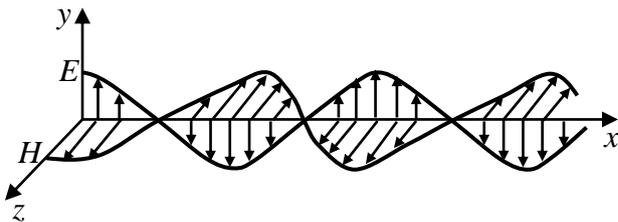
$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 10^9} = \sqrt{(4\pi)^2 900} \approx 120\pi \approx 377.$$

Т. е. в системе СИ напряженность электрического поля в волне в 377 раз больше напряженности магнитного поля.

В векторной форме решения запишутся в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx),$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx).$$



Схематически процесс распространения электромагнитной волны показан на рисунке.

Векторы напряженности электрического и магнитного полей с вектором скорости волны составляют правую тройку.

§ 54. Энергия электромагнитных волн

В процессе распространения электромагнитные волны переносят энергию. Плотность энергии волны равна сумме плотностей энергии электрического и магнитного полей волны:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

В силу предыдущего соотношения между амплитудными значениями напряженностей электрического и магнитного полей $E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}$, плотности равны, тогда плотность энергии волны можно представить как удвоенную плотность энергии электрического поля волны:

$$w = 2w_E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

или

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{1}{v} EH.$$

Умножив на скорость распространения волны, получим модуль вектора плотности потока энергии – энергию, переносимую волной через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени:

$$S = wv = EH,$$

так как векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и образуют с вектором скорости волны \vec{v} правовинтовую систему, можно написать:

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}].$$

Вектор, определяющий плотность потока энергии, называется вектором Умова–Пойнтинга. Поток электромагнитной энергии через произвольную поверхность σ есть

$$\Phi = \int_{\sigma} \vec{S} d\vec{\sigma}.$$

Падая на некоторую поверхность, электромагнитная волна будет поглощаться и сообщать этому телу некоторый импульс, т. е. оказывать на него давление.

Пусть на поверхность некоторого тела падает по нормали к поверхности электромагнитная волна и полностью поглощается этим телом. В этом случае волна сообщает единице поверхности в единицу времени импульс, заключенный в цилиндре высотой ν и площадью $S = 1 \text{ м}^2$. Средний импульс, сообщаемый единице поверхности в единицу времени, есть давление. Учитывая, что плотность импульса электромагнитной волны равна w/c , легко найти давление электромагнитной волны:

$$P = \langle w \rangle.$$

Лебедев впервые измерил давление света на твердые тела в 1900 г. и в 1910 г. – давление света на газы. Полученные им результаты оказались в прекрасном согласии с теорией Максвелла. Давление солнечного света на Землю в ясный день составляет $P = (35 \div 70) \text{ Па}$.

Сводка основных формул и задачи к разделам IX–X

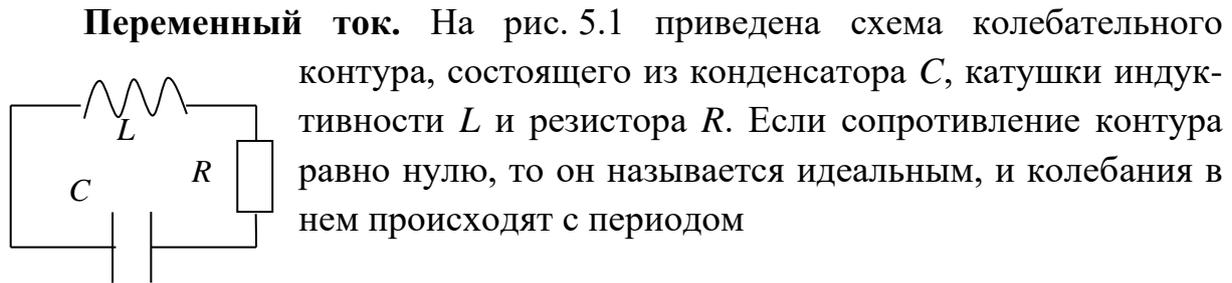


Рис. 5.1

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.1)$$

Наличие сопротивления R приводит к затуханию колебаний по закону:

$$U = U_{m0}e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (5.2)$$

где U – напряжение; U_{m0} – начальная амплитуда напряжения; β – коэффициент затухания; ω – частота затухающих колебаний; ω_0 – собственная частота колебательного контура.

Переменным называется ток, изменяющийся со временем по гармоническому закону. В цепи из последовательно соединенных конденсатора, катушки и сопротивления напряжение и сила тока изменяются по закону

$$U = U_m \cos \omega t, \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

а значение силы тока и напряжения связаны законом Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad (5.3)$$

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Здесь X_L и X_C – индуктивное и емкостное сопротивления. Напряжение и ток сдвинуты по фазе на угол φ .

Средняя мощность в цепи переменного тока зависит от сдвига фаз φ и определяется законом Джоуля–Ленца:

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi, \quad (5.4)$$

где $I_{\text{эф}} = I_m / \sqrt{2}$, $U_{\text{эф}} = U_m / \sqrt{2}$ – действующие значения тока и напряжения.

Волны. Основные понятия. Волной называют процесс распространения колебаний в пространстве. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, образует волновую поверхность. По форме волновой поверхности различают плоские, цилиндрические и сферические волны. По направлению колебаний в волне выделяют продольные и поперечные волны. Упругие волны могут быть как продольными (в газообразных, жидких и твердых телах), так и поперечными (в твердых телах и на границах раздела сред). Электромагнитные волны являются только поперечными. Для поперечных волн характерно явление поляризации.

Колебания в точке M , положение которой определяется радиус-вектором \vec{r} , происходят по закону

$$\zeta(t, \vec{r}) = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (5.5)$$

где a – амплитуда, ω – циклическая частота, α – начальная фаза, t – время,

$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$ – волновой вектор, v – скорость волны, \vec{n} – нормаль к волновой поверхности.

Уравнение (5.5) описывает плоскую монохроматическую волну с постоянной амплитудой.

Плоская монохроматическая волна (5.5) удовлетворяет следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

Электромагнитные волны. Электромагнитными волнами называют процесс распространения переменного электромагнитного поля в пространстве. В отличие от упругих, электромагнитные волны могут распространяться в вакууме, т. е. в отсутствие среды. Скорость распространения электромагнитных волн в веществе определяется выражением

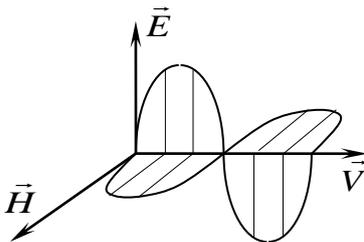


Рис. 5.2

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (5.7)$$

где ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

В вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) скорость волны $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, что

соответствует скорости света в вакууме, которая является одной из фундаментальных физических постоянных, ограничивающих скорость распространения взаимодействий.

Электромагнитная волна является поперечной. Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{V} образуют правую тройку (рис. 5.2). Значения E и H связаны между собой соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (5.8)$$

Плотность энергии w и плотность потока энергии \vec{S} электромагнитной волны определяется соотношениями

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \frac{\vec{E}\vec{H}}{v}, \quad \vec{S} = w \cdot \vec{v} = [\vec{E} \vec{H}] \quad (5.9)$$

Для большинства веществ $\mu \approx 1$ (только у ферромагнетиков $\mu \gg 1$), и скорость электромагнитной волны определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{n}, \quad (5.10)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ – абсолютный показатель преломления среды, c – скорость света в вакууме.

Примеры решения задач

Задача 1. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкости C и катушки индуктивности L , совершаются свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда напряжения на конденсаторе равна U_m . Найти для произвольного момента времени связь между током I в контуре и напряжением U на конденсаторе. Решить задачу как с помощью закона Ома, так и энергетически.

Решение

Запишем закон Ома для цепи 1–2–3 (рис. 5.3):

$$\left. \begin{array}{l} C, L \\ U_m \\ I - ? \end{array} \right|$$

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

Для данного случая

$$R = 0, \varphi_1 - \varphi_2 = -q / \tilde{N},$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}, I = \frac{dq}{dt}.$$

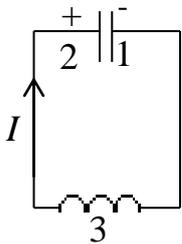


Рис. 5.3

Здесь R – активное сопротивление, q – заряд конденсатора, ε_i – э. д. с. самоиндукции. После подстановки получаем следующее уравнение для заряда:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

здесь $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота колебаний.

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где α – начальная фаза, которую положим равной нулю.

Напряжение на конденсаторе изменяется по закону

$$U = U_m \cos \omega_0 t, \quad U_m = \frac{q_m}{C}.$$

Силу тока найдем, продифференцировав q :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$I_m = \omega_0 q_m = U_m \sqrt{C/L}$. Ток опережает напряжение на конденсаторе на угол $\pi/2$.

Решим задачу энергетически. Так как колебания незатухающие, то полная энергия в контуре сохраняется

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = E_0 = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Здесь $\frac{CU^2}{2}$ – энергия конденсатора, $\frac{LI^2}{2}$ – энергия катушки, E_0 – полная энергия контура, равная максимальной энергии конденсатора. Отсюда находим ток в контуре:

$$I^2 = \frac{C}{L}(U_m^2 - U^2) = \frac{C}{L}U_m^2(1 - \cos^2 \omega_0 t) = \frac{C}{L}U_m^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Здесь подставлено выражение для напряжения $U = U_m \cos \omega_0 t$. Извлекая корень и учитывая сдвиг фаз между током и напряжением, получаем

$$I = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 2. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью $C = 22$ мкФ и катушки с активным сопротивлением $R = 20$ Ом и индуктивностью $L = 0,35$ Г, подключена к сети переменного тока с амплитудой 180 В и частотой $f = 50$ Гц. Найти амплитуду тока в

цепи, разность фаз между током и напряжением, выделяемую тепловую мощность.

Решение

$$\begin{array}{l} C = 22 \text{ мкФ} \\ R = 20 \text{ Ом} \\ L = 0,35 \text{ Г} \\ U_m = 180 \text{ В} \\ f = 50 \text{ Гц} \end{array}$$

Запишем закон Ома (5.3) для цепи переменного тока:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где I_m – амплитудное значение тока, Z – полное сопротивление, $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота. Подставляя данные, находим $X_L = 110 \text{ Ом}$, $X_C = 145 \text{ Ом}$, $Z = 40,3 \text{ Ом}$, $I_m = 4,47 \text{ А}$.

Сдвиг фаз между током и напряжением найдем по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = -1,75, \quad \varphi = -60^\circ.$$

Мощность в цепи найдем по закону Джоуля–Ленца:

$$P = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi = \frac{I_m U_m}{2} \cdot \frac{R}{Z} = 200 \text{ (Вт)}.$$

Задача 3. Найти действующее значение тока, если среднее значение его равно I_0 , а сам ток изменяется по закону $I \sim |\sin \omega t|$.

Решение

$$\begin{array}{l} \langle I \rangle = I_0, \\ I \sim |\sin \omega t| \\ I_{\text{эф}} = ? \end{array}$$

Средняя мощность, выделенная переменным током за период, определяется выражением:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) R dt, \quad (1)$$

где $T = 2\pi/\omega$ и ω – период и частота переменного тока соответственно, R – сопротивление.

Действующим значением $I_{\text{эф}}$ переменного тока называют такое значение постоянного тока, который выделяет такую же мощность: $\langle P \rangle = I_{\text{эф}}^2 R$. Сравнивая, находим $I_{\text{эф}}$:

$$I_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt}. \quad (2)$$

Представим закон изменения тока в виде $I = I_m |\sin \omega t|$ и определим среднее значение тока за период

$$\langle I \rangle = I_0 = \frac{I_m}{T} \int_0^T |\sin \omega t| dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = -\frac{2I_m}{\omega T} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\pi}.$$

Отсюда находим $I_m = \frac{\pi I_0}{2}$. Подставляя I_m и интегрируя, находим действующее значение тока:

$$\begin{aligned} I_{\text{эф}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{2I_m^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \sqrt{\frac{2I_m^2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \frac{I_0 \pi}{\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

Задача 4. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 3,0$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4,0$. Найти приращение ее длины волны.

Решение

При переходе электромагнитной волны из одной среды в другую ее частота не изменяется, а изменяется скорость (5.7)

$$\left. \begin{array}{l} \nu = 3\text{МГц} \\ \epsilon = 4 \\ \Delta\lambda - ? \end{array} \right|$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

где c – скорость волны в вакууме. Длина волны определяется выражением

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon}}.$$

Приращение длины волны найдем по формуле

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) = -50 \text{ м.}$$

Задача 5. Исходя из уравнений Максвелла, показать, что для плоской электромагнитной волны (рис. 5.4), распространяющейся в вакууме вдоль оси x , $\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$.

Решение

Запишем уравнения Максвелла для вакуума

V, \vec{E}, \vec{B}	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$
$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}$	$\text{div}\vec{D} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0,$
$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$

Из уравнения (5.5) плоской волны $\xi = a \cos(\omega t - kx)$, распространяющейся вдоль оси x , следует, что параметры волны зависят только от времени и координаты x :

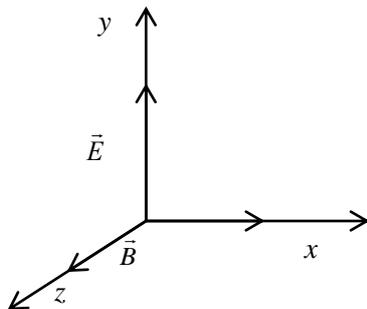


Рис. 5.4

$$\vec{E} = \vec{E}(t, x), \quad \vec{B} = \vec{B}(t, x).$$

Из условия поперечности электромагнитных волн следует, что

$$\vec{E} = (0, \vec{E}, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, \vec{B}).$$

С учетом сказанного, запишем первое и второе уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t}.$$

Заменив H и D через B и E , получим $-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$. Учитывая, что $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$, находим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Задача 6. Найти среднее значение вектора Умова–Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle$ для плоской электромагнитной волны $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, если волна распространяется в вакууме.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \\ \langle \vec{S} \rangle = ? \end{array} \right|$$

Решение

Вектор Умова–Пойнтинга дает плотность потока электромагнитной энергии и определяется выражением (5.9)

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]. \quad (1)$$

Направлен вектор \vec{S} по нормали \vec{n} к фронту волны. Учитывая, что $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$, преобразуем выражение для плотности потока электромагнитной энергии \vec{S} к виду:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 E^2 c \vec{n},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость волны в вакууме.

Подставим для E заданную зависимость и усредним по периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2 c \vec{n}}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) dt = \frac{\varepsilon_0 E_m^2 c \vec{n}}{2}. \quad (2)$$

При интегрировании учтено, что $\int_0^T \cos^2 x dx = \frac{T}{2}$. Полученное выражение можно преобразовать к виду:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_m H_m}{2} \vec{n} = \frac{[\vec{E}_m \cdot \vec{H}_m]}{2}.$$

Задачи для контроля

1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C , катушки индуктивности L с пренебрежимо малым сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_m и затем в момент $t = 0$ замкнули ключ. Найти:

- а) ток в контуре как функцию времени $I(t)$;
- б) э. д. с. самоиндукции в катушке в моменты, когда электрическая энергия конденсатора оказывается равной энергии тока в катушке.

2. По прямому проводнику круглого сечения течет ток I . Найти поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление R .

3. Найти световое давление солнечного излучения на квадратный метр земной поверхности, перпендикулярный к направлению излучения. Плотность потока солнечной энергии (солнечная постоянная) $8,4 \text{ Дж/см}^2 \cdot \text{мин}$. Считать, что волна полностью поглощается земной поверхностью.

Задачи для самостоятельной работы

1. В колебательном контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым сопротивлением, происходят колебания с энергией W . Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в η раз. Какую работу совершили при этом?

Ответ: $A = (\eta^2 - 1)W$.

2. Колебательный контур имеет емкость $C = 10$ мкФ, индуктивность $L = 25$ мГ и активное сопротивление $R = 1$ Ом. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз?

Ответ: $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2}} - 1 = 16$.

3. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости $C = 4$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 2$ мГ и активным сопротивлением $R = 10$ Ом. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

Ответ: $W_L/W_C = L/CR^2 = 5$.

4. Найти силу светового давления F_1 солнечного излучения на поверхности земного шара, считая, что излучение полностью поглощается поверхностью. Найти отношение этой силы к силе F_2 гравитационного притяжения Солнца. Средняя плотность Земли $\rho = 5,5$ г/см³.

Ответ: $F_1 = 5,9 \cdot 10^6$ Н; $F_1/F_2 = 1,6 \cdot 10^{-14}$.

XI. Ток в вакууме

§ 54. Электронная эмиссия

Металлы содержат электроны, участвующие в тепловом движении, однако электроны не выходят из металла, так как вблизи поверхности имеются силы, удерживающие электроны внутри металла. По природе это силы притяжения со стороны ионов решетки. В результате этого взаимодействия в поверхностном слое металла появляется электрическое поле, а потенциал при переходе из внешнего пространства в металл увеличивается на некоторую величину φ . Потенциальная энергия электрона уменьшается на величину $e\varphi$ ($e < 0$).

Пусть W_0 – энергия покоящегося электрона вне металла, W_1 – энергия электрона внутри металла. Тогда, если $W_1 < W_0$, электрон не может покинуть металл, поскольку его энергии недостаточно для совершения работы против сил притяжения со стороны ионов. Условие выхода электрона $W_1 \geq W_0$.

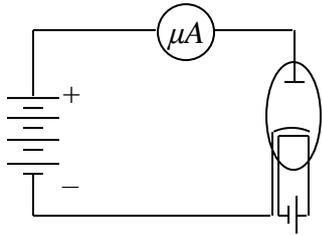
При комнатных температурах это условие не выполняется. Электроны связаны в проводнике. Если им сообщить каким-либо способом дополнительную энергию, часть электронов получит возможность покинуть металл. Наблюдается явление испускания электронов, которое называется электронной эмиссией.

В зависимости от способов сообщения энергии электронам различают различные типы эмиссии. Если электроны получают дополнительную энергию за счет повышения температуры тела, то говорят о термоэлектронной эмиссии; при получении энергии за счет облучения световым потоком – фотоэмиссии или фотоэлектрическом эффекте; если электроны покидают металл при бомбардировке заряженными частицами, говорят о вторичной электронной эмиссии.

§ 55. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода

Для наблюдения термоэлектронной эмиссии может служить вакуумная лампа, содержащая два электрода: один в виде проволоки из тугоплавкого материала (вольфрам, молибден), накаляемой током – катод, другой, холодный электрод, собирающий термоэлектроны – анод. Подобные

лампы, называемые вакуумными диодами, получили широкое распространение в радиотехнике и для выпрямления переменного тока.



Составим электрическую цепь, в которую включим вакуумный диод (см. рисунок). При холодном катоде ток в цепи не возникает, так как между электродами вакуум и носители тока отсутствуют. Если раскалить катод до высокой температуры, то миллиамперметр обнаруживает появление тока.

Причем ток может появиться только в том случае, если положительный полюс батареи соединен с анодом, а отрицательный – с катодом. Если поменять полярность подключения батареи, тока в цепи не будет. Этот факт показывает, что катод испускает электроны.

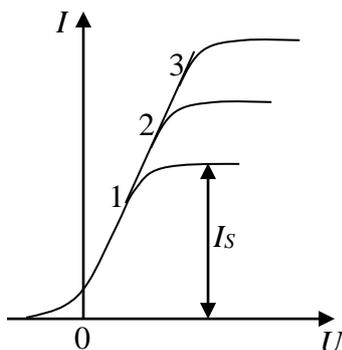
Когда напряжение между анодом и катодом равно нулю $U = 0$, при разогретом катоде ток отличен от нуля $I \neq 0$, это свидетельство того, что электроны имеют распределение по скоростям и даже в отсутствие электрического поля между анодом и катодом некоторые электроны достигают анода.

Сила тока зависит от величины потенциала анода относительно катода и от его температуры. При данной температуре сила тока растет до некоторого значения, называемого током насыщения. При этом все электроны, эмитируемые с катода, достигают анода. Ток насыщения растет с ростом температуры, поскольку увеличивается число электронов, вылетающих с катода. Зависимость тока диода от потенциала анода имеет вид:

$$I = cU^{3/2}, \quad (\text{A})$$

где c – функция формы и размеров электродов.

Для плоского диода:



$$c = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}},$$

где S – площадь электродов;
 d – расстояние между ними.

Формула (A) выражает зависимость на участках 0, 1, 2, 3, т. е. до выхода на насыщение.

Эта формула была получена С. А. Богуславским и независимо от него И. Ленгмюром. Она носит название закона Богуславского–Лэнгмюра или «закона 3/2».

Плотность тока насыщения, как указано выше, сильно зависит от температуры и выражается формулой Ричардсона–Дэшмэна:

$$j_s = AT^2 \exp(-\Phi/kT),$$

$A = \text{const}$ для всех металлов, Φ – величина, имеющая размерность энергии, по определению Φ называется термоэлектронной работой выхода. Она равна разности между энергией покоящегося электрона в вакууме и максимальной кинетической энергией электрона в металле:

$$\Phi = W_0 - E_{\text{max}}.$$

Иными словами, Φ – это работа, которую необходимо совершить, чтобы вырвать электрон из металла.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т. 2. – 480 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – Т. 3. – 687 с.
3. Калашников С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М.: Наука, 1977. – 591 с.
4. Зуйкова З. Г. Методические указания к решению задач по электричеству, магнетизму, колебаниям и волнам / З. Г. Зуйкова, В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова, А. Н. Семко. – Донецк.: ДонНУ, 2004. – 121 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
I. Электрическое поле в вакууме	4
§ 1. Элементарный заряд. Два рода электричества	4
§ 2. Взаимодействие зарядов. Закон Кулона	5
§ 3. Электрическое поле. Напряженность поля	8
§ 4. Потенциал и работа сил электростатического поля	11
§ 5. Связь между напряженностью электрического поля и разностью потенциалов	15
§ 6. Теорема Гаусса	18
§ 7. Равновесие зарядов на проводнике	20
§ 8. Проводник во внешнем электрическом поле	21
Сводка основных формул и задачи к разделу I.....	22
Примеры решения задач	26
II. Поле в диэлектриках	50
§ 9. Поляризация диэлектриков	50
§ 10. Поле внутри диэлектрика	51
§ 11. Объемные и поверхностные связанные заряды	52
§ 12. Вектор электрического смещения	53
§ 13. Поле внутри плоской пластины	54
§ 14. Электроемкость и энергия электрического поля	57
Сводка основных формул и задачи к разделу II	61
Примеры решения задач	66
III. Постоянный электрический ток	89
§ 15. Электрический ток	89
§ 16. Электродвижущая сила	92
§ 17. Закон Ома. Сопротивление проводников	94
§ 18. Закон Ома для неоднородного участка цепи	96
§ 19. Правила Кирхгофа	97
§ 20. Мощность тока	98
§ 21. Закон Джоуля–Ленца	99
Сводка основных формул и задачи к разделу III	101
Примеры решения задач	105
IV. Классическая теория проводимости металлов	121
§ 22. Природа носителей заряда в металлах	121
§ 23. Классическая теория электропроводности металлов	123

V. Магнитное поле в вакууме	127
§ 24. Взаимодействие токов	127
§ 25. Магнитное поле	128
§ 26. Закон Био–Савара–Лапласа.....	129
§ 27. Сила Лоренца.....	130
§ 28. Закон Ампера.....	131
§ 29. Контур с током в магнитном поле.....	132
§ 30. Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле	135
§ 31. Теорема Гаусса для магнитного поля. Закон полного тока.....	136
§ 32. Поле внутри проводника с током	140
VI. Электромагнитная индукция	141
§ 33. Явление электромагнитной индукции	141
§ 34. Э. д. с. Индукции	141
§ 35. Явление самоиндукции.....	143
§ 36. Взаимная индукция.....	145
§ 37. Ток при замыкании и размыкании цепи	146
VII. Магнитное поле в веществе	150
§ 38. Намагничивание магнетиков и напряженность магнитного поля	150
§ 39. Виды магнетиков.....	151
§ 40. Гистерезис.....	152
§ 41. Энергия магнитного поля.....	154
Сводка основных формул и задачи к разделам V–VII	156
Примеры решения задач	159
VIII. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях	181
§ 42. Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле	181
§ 43. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле	183
IX. Электрические колебания	186
§ 44. Свободные колебания в контуре	186
§ 45. Свободные затухающие колебания.....	188
§ 46. Вынужденные электрические колебания	192
§ 47. Переменный ток	196
§ 48. Мощность в цепи переменного тока	199

Х. Уравнения Максвелла	201
§ 49. Вихревое электрическое поле.....	201
§ 50. Ток смещения.....	203
§ 51. Система уравнений Максвелла.....	207
§ 52. Электромагнитные волны. Волновое уравнение для электромагнитного поля.....	209
§ 53. Плоская электромагнитная волна.....	212
§ 54. Энергия электромагнитных волн.....	216
Сводка основных формул и задачи к разделам IX–X.....	218
Примеры решения задач.....	221
XI. Ток в вакууме	229
§ 54. Электронная эмиссия.....	229
§ 55. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода.....	229
Список использованной литературы.....	232

Навчальне видання

Русаков Володимир Федорович

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

Навчальний посібник

(Російською мовою)

Редактор
Технічний редактор

А. О. Цяпало
Т. О. Важеніна

Підписано до друку 17.02.2017
Формат 60 x 84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 13,71
Тираж 50 прим. Зам. 9

Донецький національний університет (Вінниця)
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1854 від 24.06.2004