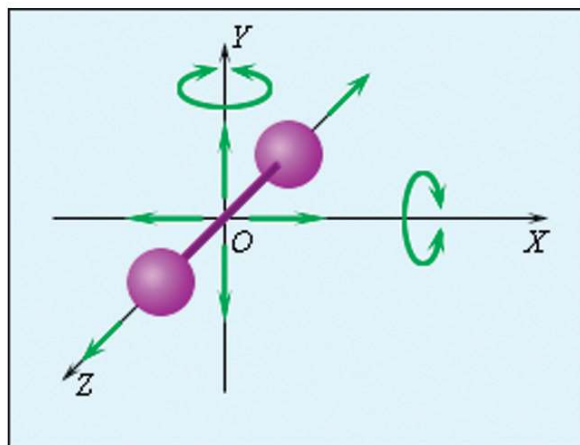


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ



ДонНУ
Винница
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова, В. В. Чабаненко

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

(методическое пособие для студентов физико-технического факультета
специальностей «Физика» и «Прикладная физика»)

Винница
ДонНУ
2015

УДК 378.147:52

P88

Составители: *В. Ф. Русаков*, проф.,
Н. М. Русакова, ст. пр.,
В. В. Чабаненко, д-р физ.-мат. наук, с. н. с.

Рецензент: *В. М. Юрченко*, д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
ДонФТИ им. А. А. Галкина НАН Украины, профессор

*Печатается по решению ученого совета физико-технического факультета
Донецкого национального университета (протокол № 4 от 20.02.2015)*

P88 Методика решения задач по молекулярной физике (методическое пособие для студентов физико-технического факультета специальностей «Физика» и «Прикладная физика») / *В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова, В. В. Чабаненко*. – Винница: ДонНУ, 2015. – 52 с.

Работа содержит пять глав: уравнение состояния идеального газа, молекулярно-кинетическая теория газов; распределения Максвелла, Больцмана и Максвелла–Больцмана; явления переноса; первое и второе начала термодинамики; энтропия. Приведены подробные методические указания к решениям задач, контрольные вопросы по каждой теме, задачи для самостоятельного решения.

Пособие будет полезно всем студентам, изучающим общую физику.

УДК 378.147:52

P88

© Русаков В. Ф., 2015
© Русакова Н. М., 2015
© Чабаненко В. В., 2015
© ДонНУ, 2015

I. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

1. Давление идеального газа на стенки сосуда определяется уравнением Клаузиуса:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \langle E_k \rangle; \quad p = n_0 k T,$$

где n_0 – концентрация молекул, m – масса одной молекулы, $\langle E_k \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну молекулу, k – постоянная Больцмана

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}},$$

N_A – постоянная Авогадро (число молекул в 1 моле вещества),

R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$

2. Уравнение Менделеева–Клапейрона – уравнение состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad \frac{m}{\mu} = \nu - \text{число молей газа.}$$

3. Масса одной молекулы газа $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$, где μ – молярная масса этого газа.

4. Число молекул в единице массы вещества $N_0 = \frac{N_A}{\mu}$, в данной массе вещества $N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A.$

5. Масса моля (киломоля) смеси

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}.$$

Плотность газа ρ и концентрация его молекул (число молекул в единице объема) n_0 , связаны соотношением

$$\rho = m_0 \cdot n_0, \quad n_0 = \frac{N_A}{\mu} \rho.$$

6. Основные единицы измерения давления

1 Па = 1 Н/м², 1 мм рт.ст = 1 Торр = 133,3 Па, 1 бар = 10⁵ Па,

1 норм. ат. (физ. ат.) = 760 Торр = 1,013·10⁵ Па, 1 тех. ат. = 9,8·10⁴ Па ≈ 10⁵ Па.

7. Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в смесь.

8. В задачах на состояния идеального газа следует исходить из уравнения его состояния и законов, описывающих рассматриваемые процессы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1. Определить число молекул в стакане воды емкостью 200 см^3 .

$$V = 200 \text{ см}^3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$n - ?$$

$m = \rho V$ – масса воды в стакане.

$$\text{Масса одной молекулы } m_0 = \frac{\mu}{N_A}.$$

$$\text{Число молекул } n = \frac{m}{m_0} = \frac{\rho V N_A}{\mu},$$

$$n = 6,7 \cdot 10^{24} \text{ молекул.}$$

Задача 2. Найти массу киломоля смеси 25 г кислорода и 75 г азота.

$$m_{\text{O}_2} = 25 \text{ г} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$m_{\text{N}_2} = 75 \text{ г} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$\mu_{\text{O}_2} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\mu_{\text{N}_2} = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\mu_{\text{см}} - ?$$

По закону Дальтона $p_{\text{см}} = p_1 + p_2$.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона

для каждого газа

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT; \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT,$$

Уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов:

$$p_{\text{см}} V = \frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{см}}} RT,$$

выражая $p_{\text{см}}$, p_1 , p_2 из написанных уравнений и подставляя в закон Дальтона, получим выражение для молярной массы смеси:

$$\mu_{\text{см}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}; \quad \mu_{\text{см}} = \frac{(25 + 75) \cdot 10^{-3}}{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{75 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Задача 3. На сколько изменилась масса гелия, находящегося в баллоне объемом $0,25 \text{ м}^3$ под давлением 10^6 Па при $t = 20^\circ \text{ С}$, если после того, как из баллона выпустили часть газа, давление понизилось до 10^5 Па , а температура уменьшилась до 10° С .

$$\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$V = 0,25 \text{ м}^3$$

$$T_1 = 293 \text{ К}$$

$$T_2 = 283 \text{ К}$$

$$p_1 = 10^6 \text{ Па}$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Па}$$

$$\Delta m = ?$$

Здесь нет изопроцесса, поэтому запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для каждого из состояний:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1; \quad m_1 = \frac{p_1 V \mu}{R T_1};$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2; \quad m_2 = \frac{p_2 V \mu}{R T_2}.$$

Теперь можно определить массу выпущенного газа:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V \mu}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right);$$

$$\Delta m = \frac{0,25 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8,31} \left(\frac{10^6}{293} - \frac{10^5}{283} \right) = 0,36 \text{ кг}.$$

Проверим размерность полученного результата:

$$[\Delta m] = \left[\frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Н}}{\text{моль} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2} \right] = [\text{кг}], \text{ учитывая, что } [\text{Дж}] = [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

Задача 4. Воздух находится в цилиндре под поршнем, который свободно перемещается. Цилиндр нагревают от $t_1 = 27^\circ \text{C}$ до $t_2 = 67^\circ \text{C}$. Масса поршня 3 кг, $S = 0,3 \text{ дм}^2$. Определить работу, которую совершает воздух при расширении, сдвигая поршень.

$$T_1 = 300 \text{ К}$$

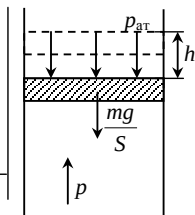
$$T_2 = 340 \text{ К}$$

$$V_1 = 1 \text{ л} = 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$m = 3 \text{ кг}$$

$$S = 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$A = ?$$



Поршень находится в равновесии, если

$$p_{\text{ат}} + \frac{mg}{S} = p,$$

где p – давление воздуха на поршень. Давление постоянно, следовательно, процесс изобарный, тогда

$$\frac{V}{T} = \text{const}, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad V_2 = \frac{V_1}{T_1} T_2;$$

Работа

$$A = Fh = pSh = p(V_2 - V_1),$$

подставляя значения давления и конечного объема, окончательно получим выражение для работы:

$$A = \left(p_{\text{ат}} + \frac{mg}{S} \right) \left(\frac{V_1}{T_1} T_2 - V_1 \right) = \left(p_{\text{ат}} + \frac{mg}{S} \right) V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Задача 5. В баллоне емкостью $V = 100$ л содержится кислород под давлением 5 ат. В баллон добавили 1 кг азота. Определить давление в баллоне, если $T = 300$ К.

По закону Дальтона $p_{\text{смеси}} = p_1 + p_2$; $p_1 = 5$ ат, p_2 – парциальное давление 1 кг азота.

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT; \quad p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} = 8,8 \text{ ат}; \quad p = 5 \text{ ат} + 8,8 \text{ ат} = 13,8 \text{ ат}.$$

Задача 6. Сколько ртути войдет в стеклянный баллончик объемом $V = 5 \text{ см}^3$, нагретый до $t = 400$ °С, при его остывании до 16 °С. Плотность ртути при 16 °С $\rho_{\text{ртути}} = 13,6 \text{ г/см}^3$?

Ртуть входит в баллон при его остывании, т. к. при изобарном процессе с понижением температуры объем воздуха должен уменьшиться. V_1 – первоначальный объем баллона и воздуха в нем. После остывания объем воздуха уменьшится до V_2 , т. к. часть объема баллона займет ртуть. Ртуть втянется и поддержит давление внутри баллона постоянным. В баллон

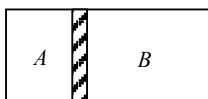


войдет ртуть, масса которой $m = \rho \Delta V$,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}; \quad m = \rho(V_1 - V_2) = \rho V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = \rho V_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right), \quad m = 38,8 \text{ г}.$$

Задача 7. В закрытом цилиндрическом сосуде постоянного сечения находится газ при нормальных условиях. Сосуд расположен горизонтально и разделен подвижным поршнем в отношении 1:2. В каком отношении поршень будет делить сосуд, если его меньшую часть нагреть до 27 °С, а большую охладить до -123 °С.

$$\begin{array}{l} T_1 = 300 \text{ К} \\ T_2 = 150 \text{ К} \\ \frac{V_A}{V_B} = ? \end{array}$$



Обозначим V_0 – объем всего сосуда,

$$V_0 = V_A + V_B.$$

T_0 – первоначальная температура.

После выравнивания давлений слева и справа объединенный газовый закон запишется в виде:

для сосуда А:

$$\frac{\frac{1}{3} V_0}{T_0} = \frac{V_A}{T_1};$$

для сосуда В:

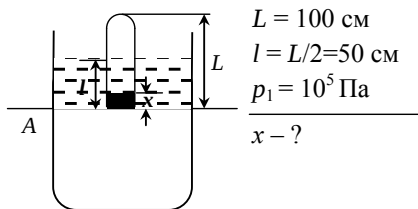
$$\frac{\frac{2}{3} V_0}{T_0} = \frac{V_B}{T_2};$$

V_A и V_B – объемы после изменения температуры.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_1}{2T_2} = 1.$$

Сосуд разделится на две равные части.

Задача 8. Стекланную трубку длиной $L = 100$ см, закрытую с одного конца, открытым концом опустили в воду на 50 см. На какую высоту x вода вошла в трубку? Атмосферное давление равно p_1 , $T = \text{const}$.



Если бы трубка была открыта сверху, то вода в трубке и в сосуде находилась бы на одном уровне. Поскольку сверху трубка закрыта, то после погружения ее в сосуд давление воздуха в трубке изменится и объем воздуха тоже.

Т. к. процесс изотермический, применим закон Бойля-Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad (1)$$

где V_1 , V_2 – объем воздуха в трубке до и после погружения.

$$V_1 = L \cdot S; \quad V_2 = (L - x) \cdot S,$$

где S – площадь сечения трубки.

$$\text{Для уровня A: } p_2 + \rho_w g x = p_1 + \rho_w g l; \quad p_2 = p_1 + \rho_w g (l - x),$$

где ρ_w – плотность воды.

Выражение для p_2 подставим в формулу (1).

$$p_1 L S = [p_1 + \rho_w g (l - x)] (L - x) \cdot S,$$

выполняя элементарные преобразования, получим квадратное уравнение:

$$x^2 - \left(\frac{p_1}{\rho_w g} + L + l \right) x + Ll = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 4,3$ см, второй корень уравнения $x > L$ не имеет физического смысла.

Задача 9. Газ занимает объем $V = 4$ л под давлением $p = 5 \cdot 10^2$ Па. Определить суммарную среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул.

$$\langle E \rangle = \langle \epsilon \rangle N,$$

где $\langle \epsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия, приходящаяся на 1 молекулу, N – полное число молекул.

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} kT; N = \frac{m}{\mu} N_A, \langle E \rangle = \frac{m}{\mu} N_A \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$.

Тогда $\langle E \rangle = \frac{3}{2} pV = 3 \text{ Дж}.$

Задача 10. Средняя квадратичная скорость молекул газа 450 м/с, давление при этом 0,7 Па. Найти плотность газа при этих условиях.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$

Среднюю квадратичную скорость найдем из условия $\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT.$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{\mu}.$$

Тогда $\rho = \frac{3p}{\langle v^2 \rangle} = 1,03 \text{ кг/м}^3.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Получить уравнение Менделеева–Клапейрона, исходя из газовых законов.
2. Какие физические предпосылки сделаны при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?
3. Сформулировать закон Дальтона.
4. Можно ли применять уравнение Менделеева–Клапейрона для насыщенных паров.
5. Изобразить графики всех изопроцессов на диаграммах $p, V; p, T; V, T$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Лазерные трубки одинакового объема $V = 60 \text{ см}^3$ должны заполняться смесью гелия и неона в молярном отношении 5:1 при общем давлении $p = 6 \text{ мм рт. ст.}$ Имеются баллоны с этими газами одинакового объема $V = 2 \text{ дм}^3$. В баллоне с гелием давление $p_1 = 50 \text{ мм рт. ст.}$, в баллоне с неоном давление $p_2 = 200 \text{ мм рт. ст.}$ Какое число трубок можно заполнить?

2. Найти формулу некоторого соединения углерода с водородом, если известно, что $m = 0,65 \text{ г}$ этого вещества в газообразном состоянии создает в объеме $V = 1 \text{ дм}^3$ при температуре $t = 27^\circ \text{C}$ давление $p = 5,6 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

3. Баллон, содержащий 1 кг азота, при испытании взорвался при температуре 350 °С. Какую массу водорода можно хранить в этом баллоне при температуре 20 °С, имея пятикратный запас прочности?

4. Температура комнаты была 10 °С. После того, как печь натопили, температура в комнате поднялась до 20 °С. Объем комнаты 50 м³, давление в ней 97 кПа. На сколько изменилась масса воздуха, находящегося в комнате? Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

5. Баллончик для приготовления газированной воды имеет объем 5 см³ и содержит углекислый газ при давлении 15 атм. Можно ли на весах с точностью взвешивания 10 мг заметить разницу в массах полного и пустого баллончиков?

6. Баллон газовой плиты объемом 0,5 дм³ содержит 300 г пропана (C_3H_8) при давлении $1,6 \cdot 10^6$ Па. Что можно сказать об агрегатном состоянии пропана в баллоне?

7. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $p = b/V^h$, где b и h – некоторые постоянные, причем $0 < h < 1$?

II. СТАТИСТИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

1. Функция распределения молекул идеального газа по компонентам скоростей (плотность вероятности случайной величины v) имеет вид:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)},$$

где m – масса молекулы, T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана.

2. Функция распределения Максвелла молекул газа по модулям скоростей имеет вид:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

3. Наиболее вероятная скорость v_b , средняя скорость $\langle v \rangle$ и средне-квадратичная скорость $v_{\text{ср. кв.}}$ при максвелловском распределении молекул по скоростям, соответственно равны:

$$v_b = \sqrt{\frac{2kT}{m}}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}; \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

4. Вероятность того, что модуль скорости лежит между значениями v и $v + dv$, равна:

$$dP(v) = f(v)dv;$$

$$dP(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

5. Вероятность того, что компоненты v_x , v_y , v_z скорости v молекул газа находятся соответственно между v_x и $v_x + dv_x$; v_y и $v_y + dv_y$; v_z и $v_z + dv_z$ равна: $dP(v_x, v_y, v_z) = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$. Обозначая $dv_x, dv_y, dv_z = d^3v$, имеем:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} d^3v.$$

6. Относительное число (доля) молекул, модули скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, связано с функцией распределения следующим образом:

$$\frac{dn(v)}{n} = dP(v) = f(v)dv.$$

Следовательно, $dn(v) = n f(v) dv$.

Аналогично запишутся формулы для интервала изменения компонент скоростей:

$$\frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{n} = dP(v_x, v_y, v_z) = f(v_x, v_y, v_z) d^3v.$$

Здесь $\frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{n}$ – относительное число молекул (доля молекул), проекции скорости которых на координатные оси лежат в интервале между v_x и $v_x + dv_x$; v_y и $v_y + dv_y$; v_z и $v_z + dv_z$.

7. Часто для решения задач удобно использовать выражение для распределения Максвелла в безразмерных параметрах.

Введем $c = \frac{v}{v_b}$, это скорость молекулы, измеренная в единицах наиболее вероятной скорости, тогда

$$dP(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Так как $v_b = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, то $e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = e^{-c^2}$,

$$dP(c) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} c^2 e^{-c^2} dc,$$

где $dv = v_b dc$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

При решении задач на распределение Максвелла возникает необходимость в вычислении интегралов, в основном, двух типов (остальные встречающиеся интегралы сводятся к этим двум):

1. Интеграл Пуассона

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \text{ или } I_1' = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

2. Интеграл вида

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx.$$

Вычислим интеграл Пуассона

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx,$$

т. к. подынтегральная функция четная. Возведем интеграл в квадрат и заменим $ax^2 = t^2$.

$$I_1^2 = \frac{4}{\alpha} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{4}{\alpha} \int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)} dt du.$$

Введем полярные координаты ρ и φ :

$$u^2 + t^2 = \rho^2, \quad dudt = \rho d\rho d\varphi;$$

$$I_1^2 = \frac{4}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \frac{4}{\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho^2 = \frac{\pi}{\alpha};$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho^2 = -e^{-\rho^2} \Big|_0^\infty = 1.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Второй интеграл равен

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

и называется Γ -функцией Эйлера, которая, как видим из формулы, сводится к факториалу показателя степени n подынтегральной степенной функции.

Например,

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2!}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^3}.$$

При решении задач часто встречаются интегралы с полуцелым значением показателя степени.

Например,

$$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-\alpha x} dx = \frac{1/2!}{\alpha^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}.$$

Покажем, что $\frac{1}{2}! = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$; $\frac{1}{2}! = \int_0^\infty x^{1/2} e^{-\alpha x} dx \Big|_{\alpha=1}.$

Для вычисления данного интеграла сделаем замену

$$x^{1/2} = t; \quad x = t^2; \quad dx = 2t dt, \quad e^{-\alpha x} = e^{-\alpha t^2}.$$

Тогда имеем: $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-\alpha x} dx = \int_0^\infty t e^{-\alpha t^2} \cdot 2t dt = 2 \int_0^\infty t^2 e^{-\alpha t^2} dt.$

Методом дифференцирования по параметру α этот интеграл можно свести к интегралу Пуассона. Действительно,

$$\int_0^\infty t^2 e^{-\alpha t^2} dt = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha t^2} dt = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-3/2}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-\alpha x} dx = 2 \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-3/2} \Big|_{\alpha=1} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Вычислим для примера следующий интеграл:

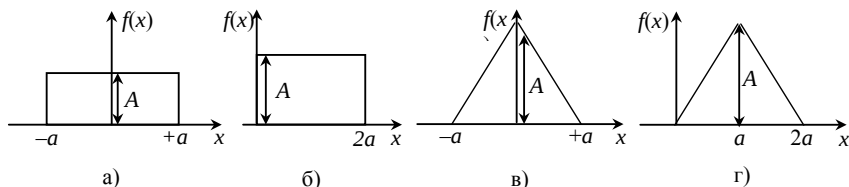
$$\int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-\alpha x} dx = \frac{3}{2}! / \alpha^{5/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} / \alpha^{5/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha^{-5/2} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-5/2}.$$

В общем случае

$$\Gamma\left(\mu, n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\mu x} x^{n + \frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\mu^{n + \frac{1}{2}}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\mu^{n + \frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{\pi} (2n-1)!!}{2^n}$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1.



На рисунке даны графики четырех различных функций распределения вероятностей значений некоторой величины x . Найти для каждого из графиков константы A , при которых функция оказывается нормированной. Вычислить среднее значение x , x^2 . Для первого графика вычислить также $\langle |x| \rangle$.

Из графика видно, что в интервале $(-a, +a)$ функция $f(x) = A$. Условие нормировки $\int_{-a}^a f(x) dx = 1$. Т.к. $f(x) = A$, то $A \int_{-a}^a dx = 1$; $A = \frac{1}{\int_{-a}^a dx} = \frac{1}{2a}$;

$$\langle |x| \rangle = \int_{-a}^a |x| f(x) dx = 2A \int_0^a x dx = 2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{a}{2};$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a}^a x^2 f(x) dx = A \int_{-a}^a x^2 dx = A \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{a^2}{3}.$$

$\langle x \rangle = 0$, т. к. x принимает одинаковое число положительных и отрицательных значений в интервале $(-a, +a)$, поэтому ее среднее значение равно 0.

Остальные примеры проделайте самостоятельно.

Ответы: б) $A = \frac{1}{2}a$; $\langle x \rangle = a$; $\langle x^2 \rangle = \frac{4a^2}{3}$;

$$\text{в)} A = \frac{1}{a}; \langle x \rangle = 0; \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{6};$$

$$\text{г)} A = \frac{1}{a}; \langle x \rangle = a; \langle x^2 \rangle = \frac{7a^2}{6}.$$

Задача 2. Функция распределения вероятностей величины x имеет вид $f(x) = Ae^{-\alpha x^2} 4\pi x^2$, где A и α – константы. Написать приближенное выражение для вероятности ΔP того, что значение x окажется в пределах 7,9999 до 8,0001.

Вероятность того, что величина x имеет значение от x до $x + \Delta x$, с учетом того, что $\Delta x \ll x$, равна: $\Delta P(x) = f(x)\Delta x$;

$$\Delta x = 8,0001 - 7,9999 = 0,0002.$$

Среднее значение величины x : $\langle x \rangle = 8$.

$$\text{Поэтому } \Delta P(x) = Ae^{-64\alpha} \cdot 4\pi \cdot 64 \cdot 0,0002 = 0,16Ae^{-64\alpha}.$$

Задача 3. Гармонический осциллятор массы m совершает колебания с амплитудой a и частотой ω . Найти:

а) функцию распределения вероятностей значений координаты x осциллятора $f(x) = \frac{dP(x)}{dx}$;

б) $\langle x \rangle$;

в) $\langle |x| \rangle$;

г) $\langle x^2 \rangle$;

д) среднее значение потенциальной энергии осциллятора $\langle U \rangle$.

Вероятность обнаружить осциллятор в точке с координатой, лежащей в окрестности $[x; x + dx]$ пропорциональна времени прохождения этого интервала $dP(x) \sim dt(x)$. Коэффициентом пропорциональности является функция распределения $f(x)$. Таким образом,

$$dP(x) = f(x)dt(x).$$

$$\text{Представим } dt(x) = \frac{dt}{dx} \cdot dx.$$

Функция распределения $f(x)$ удовлетворяет условию нормировки.

$$\int_0^{T/2} dP(x) = 1, \text{ где } T - \text{полный период колебаний осциллятора.}$$

За время $T/2$ осциллятор совершает колебание от одной крайней точки до другой. Отсюда $f(x) = \frac{2}{T}$ и $dP(x) = \frac{2}{T} dt$.

Смещение осциллятора при его гармоническом колебании, как известно из механики, $x = a \cdot \cos \omega t$.

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{x}{a};$$

$$dt = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$dP(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

$$\text{Следовательно, } f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Зная $f(x)$, нетрудно, используя алгоритм, приведенный в задаче 1, найти требуемые величины. $\langle x \rangle = 0$, т.к. $\langle \cos \omega t \rangle = 0$; $\langle |x| \rangle = \int_0^{\infty} x f(x) dx$;

$$\langle x^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx; \quad \langle U \rangle = \left\langle \frac{kx^2}{2} \right\rangle = \frac{k}{2} \langle x^2 \rangle.$$

Задача 4. Определить долю молекул водорода, модули скоростей которых при $t = 27^\circ \text{C}$ лежат в интервале от $v_1 = 1898 \text{ м/с}$ до $v_2 = 1903 \text{ м/с}$.

Изобразить примерный график зависимости $\frac{\Delta n(v)}{n}$ от v .

$T = 300 \text{ К}$
 $v_1 = 1898 \text{ м/с}$
 $v_2 = 1903 \text{ м/с}$

$\frac{\Delta n}{n} = ?$

Интервал изменения скоростей $\Delta v = v_2 - v_1 = 5 \text{ м/с}$.
 Он достаточно мал по сравнению с самими скоростями.
 Поэтому для определения искомой доли молекул можно воспользоваться выражением, приведенным в задаче 2:

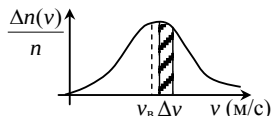
$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v.$$

Наиболее вероятная скорость молекул водорода при заданной температуре T равна:

$$v_n = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1,57 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Воспользуемся распределением Максвелла в безразмерных параметрах

$$c = \frac{v}{v_B}.$$



$$\text{Тогда } \frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} c^2 e^{-c^2} \Delta c,$$

$$\Delta c = \frac{\Delta v}{v_B} = \frac{5}{1,57 \cdot 10^3} = 3,16 \cdot 10^{-3};$$

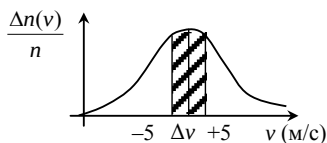
$$\frac{\Delta n}{n} = 2,45 \cdot 10^{-3}.$$

Т. е. 0,245 % всех молекул водорода имеют скорости, заключенные в указанном интервале.

Площадь заштрихованной области выражает искомую долю молекул.

Задача 5. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T , обладает скоростями, отличающимися от v_B не более, чем на 5 м/с? Рассмотреть случаи $T_1 = 400$ К, $T_2 = 900$ К.

Задача отличается от предыдущей определением интервала разброса скоростей. «Не более, чем на 5 м/с» означает, что эти скорости могут быть больше, чем v_B , на 5 м/с, либо меньше ее на эту же величину. Следовательно, интервал $\Delta v = 10$ м/с. Отсчет ведется от v_B , следовательно, здесь $v = v_B$.



$$\text{Тогда } c = \frac{v}{v_B} = 1; \Delta c = \frac{\Delta v}{v_B} = \frac{10}{v_B};$$

$$v_{B1} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\mu}} \Big|_{T_1=400 \text{ К}} = 1820 \text{ м/с};$$

$$v_{B2} = \sqrt{\frac{2RT_2}{\mu}} \Big|_{T_2=900 \text{ К}} = 2730 \text{ м/с}.$$

В случае малости интервала Δc по сравнению с c можно воспользоваться формулой:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} c^2 e^{-c^2} \Delta c = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \Delta c.$$

$$\Delta c_1 = \frac{1}{182}; \Delta c_2 = \frac{1}{273}; \text{ т. е. } \Delta c \ll c.$$

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n} = 0,0046; \frac{\Delta n_2}{\Delta n} = 0,003.$$

Таким образом, с увеличением температуры T наиболее вероятная скорость увеличивается, а доля молекул, лежащих в одном и том же интервале,

уменьшается, т. е. с ростом температуры график функции распределения расширяется, а максимум понижается и смещается в область более высоких температур, площадь же под кривой, в силу условия нормировки, сохраняется.

Задача 6. Найти среднее значение кинетической энергии хаотического движения молекул, подчиняющихся распределению Максвелла.

$$\langle E_k \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2}.$$

Итак, задача сводится к вычислению среднего значения квадрата скорости.

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^\infty v^2 f(v) dv; \\ f(v) &= 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}; \\ \langle v^2 \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \end{aligned}$$

Необходимо вычислить интеграл I .

$$I = \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{1}{2} \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv^2.$$

Здесь проведена замена $\alpha = \frac{m}{2kT}$ и $vdv = \frac{1}{2} dv^2$.

Заменим v^2 через t .

$$\begin{aligned} dv^2 &= dt; \quad v^3 = t^{\frac{3}{2}}. \\ I &= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{2} \frac{3/2!}{\alpha^{5/2}} = \frac{1}{2} \frac{3/2 \cdot 1/2 \cdot \sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}; \\ I &= \frac{3\sqrt{\pi}(kT)^{5/2}}{8m^{5/2}}. \\ \langle v^2 \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}(kT)^{5/2}}{8m^{5/2}} = \frac{3kT}{m}; \\ \langle E_k \rangle &= \frac{3}{2} kT. \end{aligned}$$

Можно вычислить среднюю кинетическую энергию иначе, получив распределение молекул газа по энергиям. Сделаем это в задаче 7.

Задача 7. Из функции распределения Максвелла по модулям скоростей получить функцию распределения по энергиям и вычислить среднюю кинетическую энергию молекул газа.

Для того, чтобы из функции распределения Максвелла по модулям скоростей получить функцию распределения по энергиям, обязательно нужно сначала перейти от вероятности $dP(v)$ к $dP(E)$. $dP(E)$ означает вероятность того, что молекулы газа имеют энергию, лежащую в интервале от E до $E + dE$.

$$dP(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv;$$

$$E = \frac{mv^2}{2}; \quad v^2 = \frac{2E}{m}; \quad 2v dv = \frac{2}{m} dE; \quad dv = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}.$$

После несложных преобразований, получим:

$$dP(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE, \text{ напомним, что } dP(E) = f(E) dE.$$

$$\text{Значит, } f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Теперь вычислим $\langle E \rangle$.

По определению

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^{\infty} E f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \int_0^{\infty} E^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE; \\ \int_0^{\infty} E^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE &= \frac{3/2!}{(1/kT)^{5/2}} = \frac{3/2 \cdot 1/2 \cdot \sqrt{\pi}}{(kT)^{-5/2}} = \frac{3}{2} kT. \end{aligned}$$

Интеграл берем от 0 до ∞ , т. к. кинетическая энергия молекул идеального газа положительна. Результат, естественно, совпадает с полученным в предыдущей задаче.

Самостоятельно: получите функцию распределения молекул по импульсам $f(p)$, из функции распределения по скоростям, учитывая, что $p = mv$.

$$\text{Ответ: } f(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}}.$$

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И МАКСВЕЛЛА–БОЛЬЦМАНА

1. Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{\frac{mgh}{kT}}$$

выражает зависимость давления газа от высоты его столба, p_0 – давление газа при $h = 0$.

2. Зависимость концентрации молекул от их потенциальной энергии во внешнем силовом поле выражается формулой Больцмана,

$$n = n_0 e^{\frac{U}{kT}},$$

где n_0 – концентрация молекул при $U = 0$.

3. Вероятность того, что отдельная молекула из данной совокупности находится в состоянии с полной энергией E (распределение Максвелла–Больцмана), выражается формулой:

$$dP(E) = C e^{\frac{E}{kT}} dE,$$

где $E = E_k + U$ – полная механическая энергия молекулы, C – постоянный множитель, определяемый из условия нормировки (т. е. вероятность обнаружить молекулу в любом из возможных состояний равна 1).

Задача 8. Показания барометра на вершине горы составляет 43 % от его показания у подножья. Определить высоту вершины, если средняя температура 10 °С.

$$\begin{array}{l} p = 0,43 p_0 \\ T = 283 \text{ K} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \\ H = ? \end{array}$$

Здесь не учитывается изменение температуры с высотой, поэтому воспользуемся барометрической формулой

$$p = p_0 e^{\frac{\mu g H}{RT}}.$$

(Здесь $\frac{m}{k}$ заменим через $\frac{\mu}{R}$).

$$\frac{p}{p_0} = 0,43, \quad 0,43 = e^{\frac{\mu g H}{RT}};$$

$$\ln 0,43 = -\frac{\mu g H}{RT}; \quad H = -\frac{\ln 0,43 \cdot RT}{\mu g} = \frac{0,844 \cdot 8,31 \cdot 283}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 6980 \text{ м.}$$

Задача 9. Вычислить массу M столба воздуха высотой $H = 1000$ м, сечением $S = 1 \text{ м}^2$, если плотность воздуха у поверхности Земли $\rho_0 = 1,2 \text{ кг/м}^3$, а давление $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Температуру считать постоянной.

Т.к. плотность воздуха меняется с высотой, выделим на высоте h цилиндрический слой, толщиной dh , масса этого слоя $dM = \rho dV$, где $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$, а $dV = Sdh$.

$$\text{Тогда вся масса столба } M = \int_0^H \rho dV = \rho_0 \int_0^H e^{-\frac{\mu gh}{RT}} Sdh.$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона имеем:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT; \quad \rho = \frac{m}{V}; \quad p_0 \frac{V_0}{m} = \frac{RT}{\mu}; \quad e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = e^{-\frac{\rho_0 gh}{p_0}}.$$

Подставляя найденное выражение в интеграл для массы и выполняя интегрирование, окончательно получим

$$M = S\rho_0 \int_0^H e^{-\frac{\rho_0 gh}{p_0}} dh = \left(1 - e^{-\frac{\rho_0 gH}{p_0}}\right) \frac{Sp_0}{g}.$$

Задача 10. Какой процент молекул газа имеет потенциальную энергию больше средней кинетической?

Функцию распределения Больцмана для частиц с потенциальной энергией U можно записать в виде:

$$f(U) = Ce^{\frac{U}{kT}}.$$

Доля молекул $\frac{dn}{n}$, энергия U которых лежит в интервале от U до $U + dU$, равна:

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{kT} e^{\frac{U}{kT}} dU.$$

Интегрируя от $\langle E_k \rangle$ до ∞ , найдем искомую величину.

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{kT} \int_{\langle E_k \rangle}^{\infty} e^{\frac{U}{kT}} dU = e^{\frac{U}{kT}} \Big|_{\langle E_k \rangle}^{\infty} = e^{\frac{\langle E_k \rangle}{kT}} = e^{\frac{3}{2}} \approx 20 \%.$$

Задача 11. Пользуясь уравнением Менделеева–Клапейрона и учитывая, что атмосферное давление изменяется с высотой по закону $dp = -\rho g dH$, получить формулу изменения давления с высотой с учетом понижения температуры (температурный градиент $\frac{dT}{dH} = -a$).

$$\frac{dT}{dH} = -a; \quad dT = -a dH; \quad T = \int -a dH = -aH + C,$$

При $H = 0$, $C_1 = T_0$. Итак, $T = T_0 - aH$.

Уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ позволяет определить плот-

ность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$;

$$dp = -\rho g dH; \quad dp = -\frac{p\mu}{RT} g dH; \quad dp = -\frac{p\mu g dH}{R(T_0 - aH)};$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dH}{(T_0 - aH)}; \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \int_0^H \frac{dH}{(T_0 - aH)};$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{\mu g}{aR} \ln \frac{\frac{T_0}{a} - H}{\frac{T_0}{a}} = \frac{\mu g}{aR} \ln \left(1 - \frac{aH}{T_0} \right);$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{aH}{T_0} \right)^{\frac{\mu g}{aR}}.$$

Таким образом, видно, что при учете понижения температуры с высотой, давление падает медленнее (не по экспоненте).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается функция распределения Максвелла по компонентам скоростей от функции распределения Максвелла по абсолютному значению скорости?
2. Почему среднее значение $\langle v_x \rangle$ равно 0?
3. Для каких интервалов температур статистика Максвелла–Больцмана не применима?
4. Сформулировать условие нормировки функции распределения вероятности.
5. Как изменяется форма кривой, изображающей распределение Максвелла, с изменением температуры?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти наиболее вероятное значение кинетической энергии поступательного движения молекул газа, т. е. такое значение E , при котором в фиксированном интервале энергии E_m в газе находится максимальное число молекул.

2. Найти среднее значение обратной величины скорости молекулы в газе.
3. Исходя из распределения Максвелла, найти средний квадрат x -компоненты скорости газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.
4. Как зависит от давления средняя скорость молекул идеального одноатомного газа при адиабатическом сжатии или расширении?
5. Найти отношение числа молекул водорода, скорости которых лежат в пределах от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул, имеющих скорости в пределах от 2000 до 2010 м/с, если температура водорода 350 °С.
6. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна таковой же скорости молекул азота при температуре 200 °С.
7. Масса крупной молекулы органического вещества равна 10^{-18} г. Найти полную среднюю кинетическую энергию теплового движения такой молекулы, взвешенной в воздухе при температуре 27 °С. Найти также среднюю квадратичную скорость молекулы при этой температуре.
8. Найти средний квадратичный импульс молекулы водорода при температуре 27 °С.

III. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

При решении задач по данной теме обычно используются следующие основные закономерности и соотношения.

1. Соответствующее уравнение переноса.
2. Формулы для коэффициентов переноса данного явления и газокинетических характеристик столкновения молекул (средняя длина свободного пробега, среднее число столкновений, эффективное сечение молекул).
3. Связь между коэффициентами переноса.
4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.
5. Уравнение состояния.

Основные соотношения:

1. Закон вязкого трения Ньютона связывает касательные напряжения τ с градиентом скорости упорядоченного движения

$$\tau = \eta \frac{du}{dx}, \quad (6.7)$$

где $\eta = \frac{1}{3} n \lambda \langle v \rangle m_0$ – коэффициент вязкости, m_0 – масса молекулы, $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул.

2. Если средние энергии молекул по объему различны, то наблюдается перенос энергии. Это явление называется теплопроводностью и подчиняется закону Фурье:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}, \quad (6.8)$$

где $\kappa = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda C_v = C_v \eta$ – коэффициент теплопроводности.

- 2а. Полное уравнение теплопроводности (в сферической системе координат) имеет вид:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + w;$$

здесь ρ , c_v , κ – плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности рассматриваемой системы, w – мощность источников или стоков энергии.

3. Диффузия (перенос массы) наблюдается при неоднородном распределении концентрации веществ и описывается законом Фика:

$$j_{m_i} = -D \frac{dn_i}{dx}, \quad (6.9)$$

где $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda = \frac{\eta}{\rho}$ – коэффициент диффузии, n_i – концентрация i – той компоненты в смеси.

Средняя длина свободного пробега молекулы газа:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi d^2 n)^{-1};$$

Число столкновений, испытываемых в среднем одной молекулой в одну секунду:

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Здесь: $\langle v \rangle$ – средняя скорость газовых молекул; d – газокINETический (эффективный) диаметр газовых молекул, n – концентрация молекул газа.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1. Коэффициент теплопроводности κ азота при температуре $t = 0$ °C равен $3,1 \cdot 10^{-5}$ кал/см·с·К. Определить газокINETический диаметр эффективного сечения молекул при этих условиях.

Связь коэффициента теплопроводности с газокINETическими характеристиками в явлениях столкновения выражается следующими соотношениями

$$\kappa = \frac{1}{3} C_v \rho \langle v \rangle \lambda, \quad (1)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (2)$$

Подставляя первое из равенств (2) в (1), найдем выражение для d^2 :

$$d^2 = \frac{\langle v \rangle C_v \rho}{3 \sqrt{2} \pi \kappa n}. \quad (3)$$

Выразим C_v , ρ , n , входящие в (3), через параметры состояния газа:

$$\rho = \frac{P \mu}{RT}, \quad (4)$$

$$n = \frac{P}{kT}, \quad (5)$$

$$C_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu}. \quad (6)$$

Так как газ двухатомный, $i = 5$. Подставляя соотношения (4)–(6) в (3) найдем:

$$d^2 = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 \mu}} \frac{R}{\kappa N_A}. \quad (7)$$

Формула (7) дает решение поставленной задачи в общем виде. Подставляя числовые значения, получим: $d \approx 3,8 \cdot 10^{-10}$ м. Сравнивая с табличными значениями для других газов, убеждаемся, что порядок величины d для всех газов один и тот же.

Задача 2. Урановый шар радиуса $R = 10$ см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия $w = 100$ Вт/см³. Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре. $T_{\text{воды}} = T_0 = 373$ К; $\kappa = 400$ Вт/м·К.

В общем случае для сферически симметричных задач уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + w. \quad (8)$$

Здесь w – мощность источников или стоков энергии. Если рассматриваемые величины не зависят от времени, то задача называется стационарной. Тогда $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ и вместо (8) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -w r^2. \quad (9)$$

Мы учли, что температура зависит только от расстояния до центра шара. После интегрирования получим:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{w}{3\kappa} r + \frac{C_1}{r^2}. \quad (10)$$

Проинтегрировав еще раз, найдем:

$$T = -\frac{w}{6\kappa} r^2 - \frac{C_1}{r^2} + C_2. \quad (11)$$

Соотношение (11) содержит две постоянные, которые необходимо определить. Однако, в задаче дано только одно граничное условие: температура поверхности шара равна температуре воды, тогда $T(R) = T_0$. Второе условие получим, используя физически разумное предположение о том, что температура в центре шара должна быть конечной, отсюда сразу же следует, что $C_1 = 0$. Используя первое условие, найдем C_2 :

$$C_2 = T_0 + \frac{w}{6\kappa} R^2. \quad (12)$$

Подставляя C_1 и C_2 в (11), получим:

$$T = T_0 + \frac{w}{6\kappa} (R^2 - r^2). \quad (13)$$

При решении задачи мы учли, что w , κ – постоянные величины.

Полагая в (13) $r = 0$, найдем температуру в центре шара:

$$T_y = T_0 + \frac{wR^2}{6\kappa} = 790 \text{ К}.$$

Задача 3. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 заполнено проводящим тепло однородным веществом. Найти распределение температуры в этом пространстве, если температура внутреннего цилиндра T_1 , а внешнего T_2 .

Задача имеет цилиндрическую симметрию, с учетом этого запишем уравнение теплопроводности:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + w \quad (14)$$

где κ – коэффициент теплопроводности вещества.

Так как задача стационарна ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) и источники энергии в рассматриваемой части пространства отсутствуют ($w = 0$), вместо (14) можно сразу написать:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{\kappa r}, \quad (15)$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Разделим в (15) переменные и проинтегрируем еще раз с учетом граничного условия $T(R_1) = T_1$.

$$\int_{T_1}^{T(R)} \partial T = \frac{C_1}{\kappa} \int_{R_1}^R \frac{\partial r}{r}, \quad (16)$$

$$T(R) = T_1 + \frac{C_1}{\kappa} \ln \frac{R}{R_1}. \quad (17)$$

Для определения C_1 используем второе граничное условие $T(R_2) = T_2$.

Тогда

$$C_1 = \kappa \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (18)$$

Подставляя найденное значение C_1 в (17), получим распределение температур в пространстве между цилиндрами:

$$T(R) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R}{R_1}.$$

Из (18) видно, что если $\kappa = \text{const}$, то температура меняется по логарифмическому закону.

Задача 4. Стержень длины l с теплоизолированной боковой поверхностью состоит из материала, коэффициент теплопроводности которого изменяется с температурой по закону $\kappa = \frac{\alpha}{T}$, где α – постоянная. Торцы стержня поддерживаются при температурах T_1 и T_2 . Найти зависимость $T(x)$, где x – расстояние от торца стержня с температурой T_1 , а также плотность потока тепла.



В отличие от двух предыдущих, в этой задаче коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Температура изменяется только вдоль одной оси – задача одномерная (см. рис.). Через боковую поверхность стержня энергия в окружающую среду не передается. Учитывая, что задача стационарная, источники отсутствуют, уравнение теплопроводности запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0.$$

Откуда:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = C, \quad (19)$$

где C – постоянная интегрирования. Если сравнить (19) с выражением для плотности потока тепла, то легко видеть, что $q = -C$. Следовательно, определив C , мы тем самым ответим на один из вопросов задачи.

Подставляя вместо κ его выражение и разделяя переменные, интегрируем с учетом того, что $T(0) = T_1$.

$$\ln \frac{T(x)}{T_1} = \frac{C}{\alpha} x. \quad (20)$$

Подставляя в (20) второе граничное условие $T(l) = T_2$, определим C :

$$C = \frac{\alpha}{l} \ln \frac{T_2}{T_1} = -q. \quad (21)$$

Выражение (21) определяет плотность потока тепла, которая является постоянной величиной, как и должно быть. Подставляя найденное значение в (20) и выполняя преобразования, найдем зависимость $T(x)$:

$$T(x) = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{x}{l}}. \quad (22)$$

Зависимость температуры от расстояния определяется показательной функцией.

Задача 5. Медный кофейник, дно которого с внутренней стороны покрыто слоем накипи толщины $l_1 = 1$ мм, нагревается на примусе. Вода в нем доведена до кипения и выделяет каждую минуту $m = 2$ г пара. Толщина дна кофейника $l = 2$ мм, а площадь $S = 300$ см². Определить разность температур $T_2 - T_1$ между внутренней и наружной поверхностями дна кофейника, предполагая, что все дно прогревается равномерно. Теплопроводность меди $\kappa = 0,92$ кал/(с·см·°C), накипи $\kappa_1 = 0,003$ кал/(с·см·°C).



Определим количество теплоты Q , поступающее в кофейник ежеминутно. Т. к. за это время образуется $m = 2$ г пара при температуре кипения, то

$$Q = mr,$$

где r – удельная теплота парообразования.

Такое же количество теплоты получает наружная поверхность дна от источника энергии – примуса, и все оно передается через двухслойную систему медь–накипь в кофейник, т. е. воде. Обозначим температуру границы раздела медь–накипь через T_1' . Запишем количество теплоты, проходящее через каждый слой (площади их одинаковы) за время t :

$$Q = \kappa_1 \frac{T_1' - T_1}{l_1} St, \quad (24)$$

$$Q = \kappa \frac{T_2 - T_1'}{l} St. \quad (25)$$

Уравнения (23), (24) и (25) образуют замкнутую систему уравнений, решение которой имеет вид:

$$T_2 - T_1 = \frac{rm}{St} \left(\frac{l}{\kappa} + \frac{l_1}{\kappa_1} \right). \quad (26)$$

Подставляя числовые значения, получим $T_2 - T_1 = 2$ °C. Отметим, что если бы накипь отсутствовала, т. е. $\kappa_1 \rightarrow \infty$, в (26) отсутствовало бы второе слагаемое и при тех же условиях $T_2 - T_1 \approx 0,013$ °C, что наглядно демонстрирует вредное влияние накипи в нагревательных приборах.

Из (26) можно найти коэффициент теплопроводности однородного материала толщиной $l + l_1$, который будет проводить тепло так же, как система медь–накипь. Очевидно, он будет равен:

$$\kappa_0 = \frac{l + l_1}{\left(\frac{l}{\kappa} + \frac{l_1}{\kappa_1} \right)}.$$

Задача 6. Как зависит λ и v (средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени) от абсолютной температуры и давления идеального газа, если последний совершает изохорный процесс?

Запишем выражение для λ и v :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

$$v = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle.$$

$V = \text{const}$, выразим λ и v через p и T , воспользовавшись уравнением состояния $p = nkT$:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \quad (27)$$

$$v = \sqrt{2}\pi d^2 \langle v \rangle \frac{p}{kT}. \quad (28)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона в случае изохорического процесса получим $p = \alpha T$, где α – некоторая комбинация параметров газа, не зависящая от температуры. Подставляя найденное значение давления p в выражение (27), получим

$$\lambda = \frac{k\alpha}{\sqrt{2}\pi d^2}. \quad (29)$$

Выражение (29) показывает, что если зависимостью эффективного диаметра от температуры можно пренебречь, то в изохорном процессе длина свободного пробега от температуры (а, следовательно, и давления) не зависит.

Подставляя найденное выражение для давления в (28) и учитывая, что

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \text{ найдем: } v \sim \sqrt{T}, \quad (30)$$

т. е. в изохорном процессе число столкновений каждой молекулы в единицу времени растет пропорционально корню квадратному из температуры (давления).

Задача 7. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости идеального газа увеличился в $\alpha = 2,0$ раза, а коэффициент диффузии D – в $\beta = 4$ раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

Коэффициент вязкости идеального газа имеет вид:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda.$$

Подставив сюда значения ρ , $\langle v \rangle$, λ и взяв отношение коэффициентов вязкости в конечном и начальном состояниях, получим:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}} = \alpha. \quad (31)$$

Для сокращения выкладок коэффициент диффузии запишем через коэффициент вязкости:

$$D = \frac{\eta}{\rho}.$$

Тогда:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (32)$$

Из (32) и уравнения Менделеева–Клапейрона легко получить:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}. \quad (33)$$

Используя уравнение состояния идеального газа (предполагается, что в рассматриваемом процессе масса газа не изменяется), можем записать:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}. \quad (34)$$

Комбинируя последнее равенство (33), (34) и (31), окончательно найдем:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha^3}{\beta} = 2,0.$$

В результате указанного процесса давление возросло в 2 раза.

Задача 8. Кислород находится при температуре 0°C в сосуде с характерным размером $l = 10$ мм (это линейный размер, определяющий характер интересующего нас физического процесса). Найти:

- давление газа, ниже которого средняя длина свободного пробега молекул $\lambda > l$;
- соответствующую концентрацию молекул и среднее расстояние между ними.

Длина свободного пробега определяется формулой:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (35)$$

По таблицам находим газокINETический диаметр $d = 3,5 \cdot 10^{-10}$ м. Подставляя в (35) концентрацию, найденную из уравнения состояния

$$n = \frac{p}{kT}, \quad (36)$$

и решая полученное уравнение относительно p , будем иметь:

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 \lambda}}.$$

По условию задачи требуется, чтобы λ было больше l , но тогда должно выполняться неравенство:

$$p < \frac{kT}{\sqrt{2\pi d^2 l}}.$$

Подставляя числовые значения, найдем $p < 0,69$ Па. Первая часть задачи решена. Заметим, что состояние, при котором средняя длина свободного пробега молекул больше характерного размера сосуда, называется состоянием физического вакуума.

Для определения соответствующей концентрации подставим в (36) граничное значение давления и, проведя выкладки, получим:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 l}} = 1,83 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}. \quad (37)$$

Далее, величина n^{-1} , очевидно, дает объем, приходящийся на одну частицу, тогда кубический корень из этой величины приблизительно дает среднее расстояние между частицами:

$$a = n^{-\frac{1}{3}} = 1,76 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие явления относятся к явлениям переноса? Относятся ли явления переноса к обратимым?
2. Какие явления относятся к стационарным?
3. Каков физический смысл коэффициентов η , D , κ ? Как зависят от температуры η , D , κ в адиабатическом процессе?
4. Является ли утверждение о независимости газокинетического диаметра от температуры точным?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[1] 2.238, 2.239, 2.243, 2.245, 2.252, 2.254, 2.262, 2.266, 2.272

IV. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Приступая к решению задач по данной теме, прежде всего необходимо выяснить характер процесса, протекающего в газе.

2. В изохорном и изобарном процессах количество теплоты, полученное газом, всегда связано с изменением его температуры

$$dQ = \nu C dT,$$

где $C = C_V$ – для изохорного и $C = C_p$ – для изобарного процессов, причем $C_p > C_V$. Т. к. C_p и $C_V > 0$, знаки приращений dQ и dT всегда в этих процессах одинаковы. В случае адиабатического и изотермического процессов не существует связи между приращением температуры газа и количеством теплоты, полученным им, т. к. в изотермическом процессе $dT = 0$, хотя газ при этом получает или отдает тепло, а в адиабатном процессе газ не получает и не отдает тепла, $dQ = 0$, а температура его может меняться.

3. При решении задач на политропические процессы и определение теплоемкости может оказаться полезной связь между теплоемкостью в данном процессе и показателем политропы:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

В случае адиабатного процесса

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V},$$

теплоемкость можно выразить через показатели политропы n , адиабаты γ и универсальную газовую постоянную R

$$C = \frac{(n - \gamma)R}{(n - 1)(\gamma - 1)}.$$

Основные соотношения.

1. Первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Здесь:

$$dU = \nu C_V^u dT = \nu \frac{i}{2} R dT$$

– приращение внутренней энергии,

$$\delta A = p \cdot dV$$

или

$$A = \int_{(1)}^{(2)} p dV$$

– работа, совершаемая газом.

2. Приведем выражения для работы в различных изопроцессах:

а) изохорный:

$$A = 0, \text{ т.к. } V = \text{const};$$

б) изобарный:

$$A = p(V_2 - V_1) = \nu RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right);$$

в) изотермический:

$$A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2};$$

г) политропический (n – показатель политропы):

$$A = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{\nu RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \right].$$

Выражение для работы в адиабатическом процессе получается из соответствующего выражения для политропического процесса заменой n на γ .

3. Уравнение Роберта-Майера связывает молярные теплоемкости C_V^μ и C_p^μ :

$$C_p^\mu - C_V^\mu = R.$$

4. Связь теплоемкости с числом степеней свободы:

$$C_V^\mu = \frac{i}{2} R; \quad C_p^\mu = \frac{i+2}{2} R.$$

5. Связь показателя адиабаты γ с числом степеней свободы имеет следующий вид:

$$\gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Задача 1. Баллон емкостью $V = 20$ л с кислородом при давлении $p_1 = 10$ ат и температуре $t_1 = 7^\circ\text{C}$ нагревается до $t_2 = 27^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

Пренебрежем изменением объема баллона вследствие расширения при нагревании и будем считать процесс изохорным. В этом случае первое начало термодинамики запишется в виде:

$$Q = \Delta U, \tag{1}$$

т. к. $A = 0$, все сообщенное газу тепло идет на увеличение его внутренней энергии

$$\Delta U = \nu C_V^\mu \Delta T = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, получим:

$$\Delta U = \frac{i}{2} V (p_2 - p_1) = \frac{i}{2} p_1 V \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right), \quad (2)$$

т. к. процесс изохорный, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Подставим это в (2):

$$\Delta U = \frac{i}{2} p_1 V \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (3)$$

Учитывая, что кислород – газ двухатомный, т. е. $i = 5$ и подставляя (3) в (1), найдем:

$$Q = \frac{5}{2} p_1 V \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right),$$

$$Q = 3,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Задача 2. Определить молярную теплоемкость идеального газа для процесса, в котором $p \sim \frac{1}{V^2}$.

Уравнение данного политропического процесса можно представить в виде $pV^2 = \text{const}$, откуда видно, что показатель политропы $n = 2$. Используя соотношение, связывающее теплоемкость в изопроцессе и показатель политропы, найдем:

$$\frac{C^\mu - C_p^\mu}{C^\mu - C_V^\mu} = 2,$$

откуда

$$C^\mu = 2C_V^\mu - C_p^\mu.$$

Используя уравнение Майера, окончательно будем иметь:

$$C^\mu = C_V^\mu - R.$$

Учитывая, что $C_V^\mu = \frac{i}{2} R$, а $i \geq 3$, делаем вывод о том, что в рассматриваемом процессе теплоемкость положительна.

Задача 3. Найти уравнение процесса идеального газа, при котором теплоемкость меняется по закону $C = \alpha T$, где $\alpha = \text{const}$, T – температура.

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме имеет вид:

$$CdT = C_v dT + pdV.$$

Используя выражение для C из условия задачи, запишем:

$$(\alpha T - C_v) dT = pdV. \quad (4)$$

Чтобы разделить переменные, выразим p через T и V из уравнения Менделеева–Клапейрона для одного моля и подставим это в (4), разделив обе части полученного равенства на T , будем иметь:

$$\left(\alpha - \frac{C_v}{T} \right) dT = R \frac{dV}{V}.$$

После интегрирования получим:

$$\alpha T - C_v \ln T = R \ln V + \ln \text{const}.$$

Выполняя элементарные алгебраические преобразования, окончательно найдем:

$$TV^{\gamma-1} e^{-\frac{\alpha T}{R}} = \text{const}. \quad (5)$$

Уравнение (5) решает поставленную задачу. Заметим, что (5) дает уравнение процесса в переменных T и V . Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, можно перейти к любой другой паре переменных, описывающих состояние идеального газа.

Задача 4. При каких значениях показателя политропы n идеальный газ нагревается при сжатии, а при каких охлаждается?

Запишем уравнение политропы в переменных T и V , т. к. связь именно этих параметров нас интересует:

$$TV^{n-1} = \text{const}$$

или:

$$T = V^{1-n} \cdot \text{const}. \quad (6)$$

Если $n > 1$, то при уменьшении объема температура будет, как это видно из (6), возрастать, т. к. в этом случае $1 - n < 0$ и газ будет нагреваться.

В случае выполнения обратного неравенства $n < 1$, при сжатии газ будет охлаждаться, т. к. $1 - n > 0$.

При $n = 1$ будет иметь место изотермический процесс.

В случае расширения газа, анализируя (6), получим обратный эффект, т. е. при $n > 1$ газ будет охлаждаться, при $n < 1$ – нагреваться.

Задача 5. Состояние идеального газа изменяется по политропе $p = kV$. Найти работу, совершаемую молеми газа при повышении его температуры от T_1 до T_2 .

Воспользуемся определением работы в термодинамике:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} p dV. \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение p из условия задачи и выполняя элементарное интегрирование, найдем:

$$A = \frac{kV_1^2}{2} \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right). \quad (8)$$

Соотношение (8) решало бы поставленную задачу, если бы были заданы пределы изменения объема, но по условию даны начальная и конечная температуры. Чтобы перейти в (8) от объемов к температурам, воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона для одного моля:

$$pV = RT.$$

Подставив сюда давление из условия задачи, получим:

$$kV^2 = RT. \quad (9)$$

Записывая (9) для начального и конечного состояний и комбинируя полученные соотношения с (8), окончательно будем иметь:

$$A = \frac{RT_1}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (10)$$

Отметим, что результат (10) можно было бы получить, воспользовавшись выражением для работы в политропическом процессе:

$$A = \frac{RT_1}{n-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right),$$

если учесть, что показатель политропы в рассматриваемом случае равен -1 .

Задача 6. Смешано $m_1 = 4,032$ г водорода с $m_2 = 32$ г кислорода. Их удельные теплоемкости $C_{p1} = 3,50$ кал/г·°C и $C_{p2} = 0,218$ кал/г·°C. Определить уменьшение внутренней энергии этой смеси ΔU при ее охлаждении на $\Delta t = 20$ °C. Для обоих газов $\gamma = 1,40$.

Воспользуемся свойством аддитивности внутренней энергии:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

Предполагается, что части между собой не взаимодействуют, так как газы идеальные.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти приращение внутренней энергии для водорода и кислорода. По определению:

$$\Delta U_1 = U_{1н} - U_{1к} = m_1 C_{V_1} \Delta T.$$

$U_{1н}$ – начальное значение внутренней энергии водорода, $U_{1к}$ – ее конечное значение.

Учитывая, что $C_V = \frac{C_p}{\gamma}$ и $\Delta T = \Delta t$, будем иметь:

$$\Delta U_1 = m_1 \frac{C_{p_1}}{\gamma} \Delta t,$$

$$\Delta U_2 = m_2 \frac{C_{p_2}}{\gamma} \Delta t.$$

Используя свойство аддитивности, получим:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (m_1 C_{p_1} + m_2 C_{p_2}) \frac{\Delta t}{\gamma}, \quad (11)$$

$$\Delta U = 1,25 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Легко видеть, что при одинаковом понижении температуры, уменьшение внутренней энергии водорода, входящего в смесь, значительно больше, чем кислорода.

Задача 7. Вычислить удельные теплоемкости для газовой смеси состоящей из $m_1 = 7,0$ г азота и $m_2 = 20$ г аргона. Газы считать идеальными.

Внутренняя энергия любой газовой системы (газ идеальный) сможет быть записана в виде:

$$U = m C_V T,$$

где m – масса системы, C_V – ее удельная теплоемкость. Применительно к рассматриваемой задаче:

$$U = (m_1 + m_2) C_V^{см} T. \quad (12)$$

С другой стороны, используя свойство аддитивности внутренней энергии, как в предыдущей задаче можно записать:

$$U = U_1 + U_2 = (m_1 C_{V_1} + m_2 C_{V_2}) T. \quad (13)$$

Сравнивая (12) и (13), легко получить выражение для удельной теплоемкости смеси при постоянном объеме:

$$C_V^{см} = \frac{m_1 C_{V_1} + m_2 C_{V_2}}{m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Уравнение Майера для удельной теплоемкости запишется в виде:

$$C_p^{cm} = C_v^{cm} + \frac{R}{\mu}; \quad (15)$$

здесь μ – молярная масса смеси

$$\mu = \frac{(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{m_1\mu_2 + m_2\mu_1} \quad (16)$$

μ_1 и μ_2 – молярные массы азота и аргона соответственно.

Подставляя (14) и (16) в (15), получим:

$$C_p^{cm} = \frac{m_1 C_{v1} + m_2 C_{v2}}{m_1 + m_2} + \frac{R(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)}{(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}, \quad (17)$$

$$C_v^{cm} = 0,42 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}; \quad C_p^{cm} = 0,65 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}.$$

Как и должно быть, $C_p^{cm} > C_v^{cm}$.

Задача 8. В вертикальном цилиндре под поршнем находится один моль идеального газа при температуре T . Пространство над поршнем сообщается с атмосферой. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа под ним в n раз? Трение поршня о стенки цилиндра пренебрежимо мало.

Поскольку по условию процесс изотермический, воспользуемся выражением для работы одного моля газа, записанной через переменные T и V .

$$A_z = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln n > 0, \quad (18)$$

т. к. по условию

$$\frac{V_2}{V_1} = n > 1.$$

Как и должно быть, при расширении газ совершает положительную работу, работа внешних сил над газом при этом будет отрицательной.

$$A_{\text{вн}} = -A_z = -RT \ln n. \quad (19)$$

Но соотношение (19) еще не решает поставленной задачи, т. к. $A_{\text{вн}}$ состоит из двух частей: работы A – силы, поднимающей поршень, и $A_{\text{атм}}$ – работы сил атмосферного давления

$$A_{\text{вн}} = A + A_{\text{атм}},$$

откуда

$$A = A_{\text{вн}} - A_{\text{атм}}. \quad (20)$$

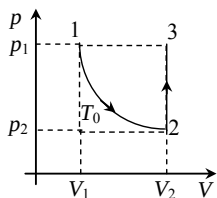
Таким образом, задача сводится к нахождению $A_{атм}$. Поскольку в процессе расширения газа атмосферное давление не меняется, для вычисления $A_{атм}$ можно воспользоваться формулой для работы в изобарном процессе:

$$A_{атм} = p(V_1 - V_2) = RT(1 - n). \quad (21)$$

Индексы в (21) расставлены так, чтобы $A_{атм}$ было меньше нуля. При переходе к последнему знаку равенства в (21) мы воспользовались уравнением Менделеева–Клапейрона.

Подставляя (19) и (21) в (20), окончательно найдем:

$$A = RT(n - 1 - \ln n). \quad (22)$$



Задача 9. Три моля идеального газа, находившегося при температуре $T_0 = 273$ К, изотермически расширили в $n = 5,0$ раза и затем изохорически нагрели так, что в конечном состоянии его давление стало равным первоначальному. За весь процесс газу сообщили количество тепла $Q = 80$ кДж. Найти величину $\gamma = C_p/C_v$ для этого газа.

При решении подобных задач очень полезно изображать протекающие процессы графически. Стрелки указывают направление протекания процесса.

Рассмотрим участок 1–2. На этом участке газ изотермически расширялся, внутренняя энергия его не изменялась, количество теплоты, полученное на этом участке, равно работе, совершенной газом:

$$Q_{12} = A_{12} = \nu RT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT_0 \ln n. \quad (23)$$

На участке 2–3 газ изохорически нагревается, работа равна нулю, количество теплоты, полученное на этом участке, равно приращению внутренней энергии

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T_{32}. \quad (24)$$

Искомая величина γ , очевидным образом, связана с числом степеней свободы газа $\frac{i}{2} = (\gamma - 1)^{-1}$. Учитывая, что все количество теплоты, полученное газом на участках 1–2–3, нам известно, видим, что для определения γ необходимо выразить ΔT_{32} через параметры, данные в условии задачи. Используя уравнение изотермы $p_1 V_1 = p_2 V_2$, откуда $\frac{p_1}{p_2} = n$ и изохоры $\frac{p_2}{T_0} = \frac{p_1}{T}$, откуда, $T = nT_0$, найдем

$$\Delta T_{32} = T_0(n-1). \quad (25)$$

Собирая вместе (23), (24) и (25), получим:

$$Q = \nu RT_0 \ln n + \nu RT_0 \frac{n-1}{\gamma-1}. \quad (26)$$

Решая (26) относительно γ , будем иметь:

$$\gamma = 1 + \frac{\nu RT_0(n-1)}{Q - \nu RT_0 \ln n}.$$

Подставляя числовые значения, найдем $\gamma = 1,39$, т. е. по свойствам рассматриваемый газ очень близок к двухатомному идеальному газу.

Задача 10. Один моль идеального газа, теплоемкость которого при постоянном давлении равна C_p^μ , совершает процесс по закону $T = T_0 + \alpha V$, где T_0 и α – постоянные. Найти теплоемкость газа как функцию его объема.

Данный процесс не является политропическим, поэтому нельзя использовать связь между теплоемкостью и показателем политропы. Запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме для одного моля идеального газа:

$$C^\mu dT = C_V^\mu dT + p dV. \quad (27)$$

Если обе части (27) разделить на dT , получим соотношение для определения теплоемкости:

$$C^\mu = C_V^\mu + p \left(\frac{dV}{dT} \right). \quad (28)$$

Нас интересует теплоемкость как функция объема, поэтому необходимо $\frac{dV}{dT}$ и давление выразить через объем. Комбинируя уравнение Менделеева–Клапейрона и зависимость температуры от объема, заданную в условии задачи, легко получить:

$$p = \frac{R(T_0 + \alpha V)}{V}. \quad (29)$$

Из зависимости температуры от объема:

$$V = \frac{T - T_0}{\alpha}.$$

Откуда

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{\alpha}. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28) и выполняя элементарные алгебраические преобразования, окончательно найдем:

$$C^{\mu} = C_p^{\mu} + \frac{RT_0}{\alpha V}.$$

С увеличением объема теплоемкость в описанном процессе убывает.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой процесс называется квазистатическим? Можно ли изобразить графически неквазистатический процесс? Сформулировать I начало термодинамики и записать его для различных изопроцессов.
2. Являются ли полными дифференциалами dA и dQ ? Чем это обусловлено?
3. Какие процессы называются политропическими?
4. Вывести уравнение Майера.
5. Получить связь показателя адиабаты с числом степеней свободы.
6. Функцией каких параметров является внутренняя энергия идеального газа?
7. При каких значениях показателя n из уравнения политропы $pV^n = \text{const}$, получаются: а) изобарный, б) изохорный, в) адиабатный, г) изотермический процессы?
8. Получить выражение для теплоемкости политропического процесса через показатель политропы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[1, № 2.26, 2.28, 2.31, 2.38, 2.39, 2.45, 2.47, 2.49, 2.55 в)].

V. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ

Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по замкнутому обратимому циклу:

$$\eta = \frac{\oint dA}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – теплота, получаемая рабочим телом от нагревателя, Q_2 – теплота, отдаваемая холодильнику.

Кпд. тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1, T_2 – температура нагревателя и холодильника, соответственно.

Количество теплоты, передаваемое в изопроцессах одному молю идеального газа:

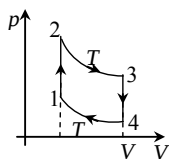
- 1) изохорный процесс: $\delta Q_v = C_v dT$;
- 2) изобарный процесс: $\delta Q_p = C_p dT$;
- 3) изотермический процесс: $Q_{изот} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$;
- 4) адиабатный процесс: $Q_{ад} = 0$;
- 5) политропный процесс: $\delta Q_{полит} = C dT$.

Изменение энтропии для обратных процессов:

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T}.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1. Термодинамический цикл осуществляется над одним молем идеального газа. Последовательность состояний дана на pV -диаграмме. Температура в состояниях 2, 3, а также 4, 1, соответственно равна T_1 и T_2 . Найти кпд. цикла.



На участках 1–2 и 2–3 рабочее тело получает тепло от нагревателя, а на участках 3–4 и 4–1 отдает его холодильнику. Найдем количество теплоты, полученное рабочим телом Q_1 и количество теплоты, отданное рабочим телом Q_2 .

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

Изохора 1–2:

$$Q_{12} = C_v (T_1 - T_2).$$

Изотерма 2–3:

$$Q_{23} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$Q_1 = C_v (T_1 - T_2) + RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$Q_2 = Q_{34} + Q_{41}.$$

Изохора 3–4:

$$Q_{34} = C_v (T_1 - T_2).$$

Изотерма 4–1:

$$Q_{41} = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$Q_2 = C_v (T_1 - T_2) + RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Используя определение кпд. $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, получаем

$$\eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{C_v (T_1 - T_2) + RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Задача 2. Тепловая машина Карно, имеющая кпд 20 %, используется как тепловой насос. Найти величину коэффициента теплопередачи и количество теплоты, которое эта машина передает за один цикл от холодильника к нагревателю, если к ней за каждый цикл подводится механическая работа, равная 20 Дж.

Коэффициент теплопередачи теплового насоса определяется как отношение количества теплоты Q_1 , переданного нагревателю, к затраченной для этой цели работе:

$$\eta_{т.н.} = \frac{Q_1}{A}.$$

Т. к. $A = Q_1 - Q_2$, где Q_2 – количество теплоты, получаемое от холодильника, то

$$\eta_{т.н.} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{1 - \frac{Q_2}{Q_1}} = \frac{1}{\eta},$$

где η – кпд цикла Карно.

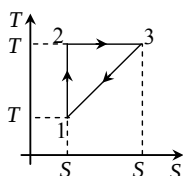
Тогда

$$Q_1 = A\eta_{т.н.} = \frac{A}{\eta}; \quad Q_1 = 100 \text{ Дж.}$$

Таким образом, при передаче 100 Дж тепла 80 Дж тепла отбирается от холодильника и 20 Дж механической энергии расходуется на приведение в действие тепловой машины.

Задача 3. Определить кпд цикла, изображенного на рисунке, если известны максимальная и минимальная температуры T_1 и T_2 .

По определению:



$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Для круговых процессов первое начало термодинамики имеет следующий вид:

$$\oint dQ = \oint dA,$$

где $\oint dQ = \oint TdS$ в случае обратимого процесса; для цикла на T,S -диаграмме – его площадь (площадь треугольника):

$$\oint dQ = \frac{1}{2}(T_1 - T_2)(S_3 - S_1).$$

Количество теплоты, получаемое рабочим телом:

$$Q_1 = \int_{(2)}^{(3)} TdS = T_1(S_3 - S_1) \text{ (площадь прямоугольника);}$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}(T_1 - T_2)(S_3 - S_1)}{T_1(S_3 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}.$$

Задача 4. Температура парогенератора на современной теплоэлектростанции, использующей перегретый пар, равна 600 °С. В холодильник подается речная вода при $t = 20$ °С. Каков максимальный кпд, который может быть получен на такой станции?

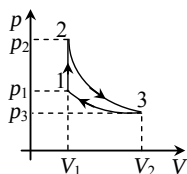
Максимально возможный кпд тепловой машины с одним нагревателем и одним холодильником имеет тепловая машина, работающая по циклу Карно. Кпд тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где

$$T_1 = 873 \text{ К}, \quad T_2 = 293 \text{ К},$$

$$\eta = \frac{873 - 293}{873} = 0,66.$$



Задача 5. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы, изохоры и адиабаты, причем, изотермический процесс происходит при минимальной температуре цикла. Найти кпд цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в n раз.

По определению кпд цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

На участке цикла 1–2 идеальный газ получает тепло (процесс изохорный)

$$Q_{12} = C_v (T_2 - T_1).$$

На участке 3–1 изотермически отдает тепло холодильнику

$$Q_{31} = RT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

На участке 2–3 $Q_{23} = 0$ (т. к. 2–3 адиабата).

Тогда

$$\eta = \frac{C_v (T_2 - T_1) - RT_1 \ln \frac{V_3}{V_1}}{C_v (T_2 - T_1)} = 1 - \frac{R \ln \frac{V_3}{V_1}}{C_v (n-1)}.$$

Учитывая, что точки 2 и 3 лежат на одной адиабате, получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1}, \quad \frac{V_3}{V_1} = n^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Так как $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$, то $\eta = 1 - \frac{\ln n}{n-1}$.

Задача 6. Во сколько раз следует увеличить изотермически объем $v = 4,0$ моля идеального газа, чтобы его энтропия испытала приращение $\Delta S = 23$ Дж/К?

В случае обратимого процесса конечное изменение энтропии определяется формулой

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T}.$$

Так как процесс является изотермическим, то

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_{(1)}^{(2)} dQ = \frac{1}{T} Q.$$

Для изотермического процесса $Q = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

Тогда $\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_2}{V_1} = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}}$; $\frac{V_2}{V_1} = 2,0$.

Т. е. объем следует увеличить в 2 раза.

Задача 7. Идеальный газ в количестве $\nu = 2,2$ моля находится в одном из теплоизолированных сосудов, соединенных между собой трубкой с краном. В другом сосуде – вакуум. Кран открыли, и газ заполнил оба сосуда, увеличив свой объем в $n = 3,0$ раза. Найти приращение энтропии.

Рассмотрим особенности данного процесса. Идеальный газ теплоизолирован, т. е. процесс идет без теплообмена с окружающей средой и $\Delta Q = 0$. Однако, процесс протекает необратимым образом и, в силу этого, должен происходить с возрастанием энтропии. Так как газ идеальный, то его внутренняя энергия зависит только от температуры и является постоянной в данном процессе. Энтропия является функцией состояния и не зависит от того, каким образом осуществляется переход из одного состояния в другое. Поэтому заменим необратимый процесс обратимым, переводящим систему в то же конечное состояние, а именно, изотермическим процессом ($dT = 0$).

Тогда первое начало термодинамики принимает следующий вид:

$$TdS - pdV = 0; \quad dS = \frac{pdV}{T};$$

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_{(1)}^{(2)} pdV = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln n,$$

$$\Delta S = 20 \text{ Дж/К.}$$

Задача 8. Теплоизолированный цилиндр разделен невесомым поршнем на две одинаковые части. По одну сторону поршня находится один моль идеального газа с показателем адиабаты γ , а по другую – вакуум. Начальная температура газа T_0 . Поршень отпустили, и газ заполнил весь цилиндр. Затем поршень медленно переместили в первоначальное положение. Найти приращение внутренней энергии и энтропии газа в результате этих двух процессов.

Рассмотрим отдельно процесс расширения газа в пустоту и обратный медленный процесс возвращения его в начальное состояние. Первый процесс является необратимым и, рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, получим $\Delta S = \ln 2$. При этом изменение внутренней энергии равно нулю.

Медленное перемещение поршня в начальное состояние – процесс обратимый и, т. к. сосуд теплоизолирован, то изменение внутренней энергии происходит за счет работы, совершенной над газом, причем, процесс является адиабатным, т. к. происходит в теплоизолированном сосуде.

$$\Delta U = - \int_{(1)}^{(2)} p dV = - p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_0} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{1}{\gamma - 1} R T_0 (2^{\gamma-1} - 1).$$

Таким образом, несмотря на то, что поршень вернулся в исходное положение и энтропия и внутренняя энергия получили приращение $\Delta S = R \ln 2$;

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1} R T_0 (2^{\gamma-1} - 1).$$

Задача 9. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс по закону $p = p_0 - \alpha V$, где p_0 и α – положительные постоянные, V – объем. При каком значении объема энтропия газа окажется максимальной?

Найдем зависимость энтропии идеального газа, совершающего заданный процесс, от объема, занимаемого газом:

$$S = S(V).$$

Изменение энтропии в общем виде может быть выражено, как

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + dA}{T}.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu \frac{RT}{\gamma - 1}.$$

Тогда

$$dS = \nu \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV.$$

Используя уравнение состояния идеального газа $\frac{p}{T} = \frac{\nu R}{V}$ и уравнение процесса $p = p_0 - \alpha V$, получим

$$T = \frac{1}{\nu R} (p_0 - \alpha V); \quad dT = \frac{1}{\nu R} (p_0 - 2\alpha V) dV,$$

Тогда выражение для $dS(V)$ принимает следующий вид:

$$dS = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \frac{(p_0 - 2\alpha V) dV}{V(p_0 - \alpha V)} + \nu R \frac{dV}{V}.$$

Необходимое условие наличия максимума энтропии

$$\frac{dS}{dV} = 0 \text{ при } V = V_m.$$

Решив уравнение

$$\frac{\nu R}{\gamma - 1} \frac{p_0 - 2\alpha V}{(p_0 - \alpha V)V} + \nu R \frac{1}{V} = 0,$$

получим $V_m = \frac{p_0 \gamma}{\alpha(1 + \gamma)}.$

Для того, чтобы убедиться, что V_m соответствует максимуму энтропии, необходимо проверить, что $\frac{d^2 S}{dV^2} < 0$ в точке $V = V_m$.

Задача 10. Один моль идеального газа с известным значением теплоемкости C_v совершает процесс, при котором его энтропия S зависит от температуры T как $S = \alpha T$, где α – постоянная. Температура газа изменилась от T_1 до T_2 .

Найти:

- молярную теплоемкость газа как функцию его температуры;
- количество теплоты, сообщенное газу;
- работу, которую совершает газ.

Для обратимых процессов $dS = \frac{dQ}{T}$, где dQ связано с теплоемкостью газа следующим образом: $dQ = CdT$. Тогда

$$dS = \frac{CdT}{T}.$$

И т. к. по условию $S = \alpha/T$, то $C = -\alpha/T$.

Количество теплоты, сообщенное газу:

$$Q = \int_{(1)}^{(2)} TdS = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\alpha}{T} dT = -\alpha \ln \frac{T_2}{T_1} = \alpha \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Для определения работы, совершенной газом, воспользуемся первым началом термодинамики:

$$A = Q - \Delta U,$$

где ΔU – изменение внутренней энергии

$$\Delta U = C_v (T_2 - T_1).$$

Тогда $A = C_v (T_1 - T_2) + \alpha \ln \frac{T_1}{T_2}.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулировать II начало термодинамики.
2. Дать определение энтропии.
3. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах.
4. Получить выражение для кпд цикла Карно.
5. Сформулировать теоремы Карно.
6. Записать выражение для энтропии через параметры.
7. Сформулировать закон возрастания энтропии.
8. Как изменяется энтропия идеального газа при адиабатном расширении его в вакуум.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

[1], 2.128, 2.134, 2.137, 2.141, 2.146, 2.149, 2.151, 2.152, 2.154, 2.157

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов – М.: Наука, 1979. – 368 с.
2. Сборник задач по общему курсу физики: Термодинамика и молекулярная физика / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, Д. В. Сивухин и др. – М.: Наука, 1976. – 208 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Термодинамика и молекулярная физика / Д. В. Сивухин – М.: Наука, 1975. – 552 с.
4. Кикоин А. К. Молекулярная физика / А. К. Кикоин, И. К. Кикоин. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
5. Матвеев А. Н. Молекулярная физика / А. Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1987. – 395 с.
6. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 416 с.
7. Русаков В. Ф. Молекулярная физика / В. Ф. Русаков, В. В. Чабаненко. – Донецк: ДонНУ, 2014. – 78 с.
8. Русаков В. Ф. Молекулярная физика и термодинамика / В. Ф. Русаков. – Донецк: ДонНУ, 2014. – 97 с.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Уравнение состояния идеального газа	3
Молекулярно-кинетическая теория газов.....	3
II. Статистика идеального газа	10
1. Распределение Максвелла	10
2. Распределение Больцмана и Максвелла–Больцмана.....	19
III. Явления переноса.....	23
IV. Первое начало термодинамики	32
V. Второе начало термодинамики. Энтропия.....	42
Список рекомендованной литературы	50

Навчальне видання

Русаков Володимир Федорович
Русакова Надія Михайлівна
Чабаненко Віктор Васильович

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

(методичний посібник для студентів фізико-технічного факультету
спеціальностей «Фізика» та «Прикладна фізика»)

(Російською мовою)

Редактор
Технічний редактор

А. О. Цяпало
О. К. Гомон

Підписано до друку
Формат 60 x 84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 3,02
Тираж 100 прим. Зам. № 20

Донецький національний університет
21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1854 від 24.06.2004 р.