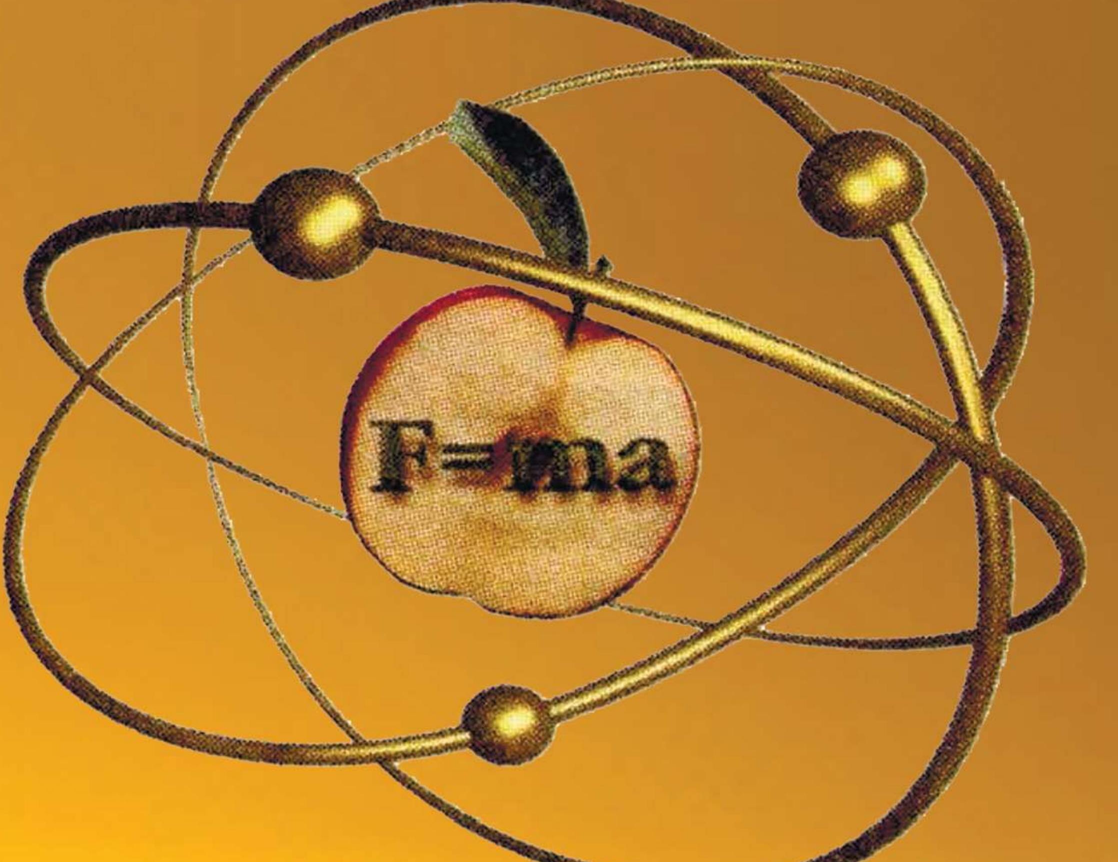
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. Русаков

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ



Винница 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. Русаков

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Винница ДонНУ 2015

ББК В2я73
УДК 530 (075.8)
Р 882

Автор:
В. Ф. Русаков доктор физ.-мат. наук, профессор

Рецензенты:
В. Г. Крыжановский доктор тех. наук, профессор,
А. Н. Шендрик доктор хим. наук, профессор

Печатается по решению ученого совета
Донецкого национального университета,
(протокол № 7 от 25.09.2015)

Русаков В. Ф.
Р 882 Физические основы механики: учебное пособие / В. Ф. Русаков. – Винница: ДонНУ, 2015. – 129 с.

В пособии обобщен материал, читаемый в течение ряда лет на I курсе физико-технического факультета для студентов специальностей «Физика» и «Прикладная физика».

ББК В2я73
УДК 530 (075.8)

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено студентам, которые начинают изучать физику в университете. Слова «начинают изучать» вовсе не обозначают, что в школе изучали не физику, а что-то другое. Смысл этого высказывания в том, что все научные утверждения по сути суждения приближенные. Физика не исключение, ее методы и законы верны лишь с определенной точностью, начинающим обучение в вузе эти законы известны на том уровне, который дает средняя школа. Причем необходимо подчеркнуть, что этот уровень – научный, хотя и недостаточно глубокий. Необходимо понимать, что достоинство науки не в ее мифической незыблемости, а в том, что она готова любую истину подвергнуть сомнению, проверить и либо отбросить, если она не выдержит проверки, либо еще крепче утвердиться в ней до той поры, пока не будет выполнена еще более строгая проверка. Даже вполне очевидные, на первый взгляд, соотношения не являются точными, содержат допущения, о которых либо забывают, либо не знают, либо даже не подозревают. Повышение точности при повторной проверке, как правило, обнаруживает дефект, исправление которого приводит к возникновению более точной теории, пригодной в более широкой области явлений.

Физика является ведущей областью естествознания. Задача ее, как и естествознания вообще – познание мира природы.

Развитие физики сложным образом переплетается с развитием других наук (математики, химии, астрономии) и со всем ходом человеческой истории.

Структурная схема физики состоит из следующих элементов:

1. Основные понятия, выработанные к данному моменту. В основе физики лежат такие фундаментальные понятия, как движение, материя, пространство и время. Содержание этих понятий меняется в процессе развития науки.

2. Методы, применяемые в физических исследованиях и полученные с их помощью важнейшие результаты.

3. Основные проблемы и направления исследований. Они отражают как уровень развития физики, так и потребности общества. Наиболее актуальными в настоящее время являются: развитие физики элементарных частиц и атомного ядра с целью дальнейшего познания строения материи; развитие ядерной и создание основ термоядерной энергетики; совершенст-

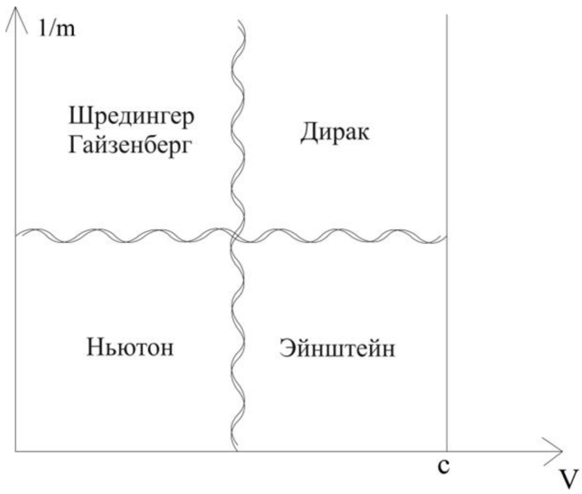
вование методов преобразования и передачи энергии; создание новых материалов; создание теории высокотемпературной сверхпроводимости.

4. Ответвления физики, ведущие в другие отрасли наук и в практику.

Перед курсом физики стоят следующие задачи:

1. Ознакомить студента с основными физическими явлениями, методами их наблюдения и экспериментального исследования. Изучить основные принципы и законы физики и их математическое выражение. Научить правильно выражать физические идеи, количественно формулировать и решать физические задачи, оценивать порядки физических величин, дать представление о границах применимости физических теорий и моделей.

2. Сформировать определенные навыки экспериментальной работы; ознакомить с главными методами точного измерения физических величин, простейшими методами обработки результатов эксперимента и основными физическими приборами.



3. Дать правильное представление о роли физики в научно-техническом прогрессе, развивать интерес к решению научно-технических и других прикладных вопросов.

В своем развитии механика прошла три эпохи: классическую (Ньютон), релятивистскую (Эйнштейн) и квантовую (Шредингер, Гейзенберг, Дирак), что схематически можно представить диаграммой. Здесь m – масса объекта, V – скорость его движения, c – скорость света.

С каждым новым этапом законы становились все более точными, все более общими. Нужно или не нужно учитывать релятивистские поправки в каждой задаче решается отдельно с учетом точности измерений.

Отметим, что новые теории не отвергают старые, а включают их в себя как предельный случай, новое принимается не потому что оно новее, а потому, что оно точнее. У истоков каждой науки стоит эксперимент. Данные опыта подвергаются теоретическому анализу, создаются абстрактные понятия, которые отражают суть явления. Роль теории: создание абстрактных понятий и установление законов, связывающих их друг с другом.

Экспериментальный и теоретический этап в познании природы чередуются; опыт создает предпосылки для анализа, теория облекает их в законы и передает эксперименту для проверки, новые данные снова анализируются и так далее, – знание расширяет свои границы и уточняется.

Одно из основных достоинств физики состоит в единстве теории и эксперимента.

В своих рассуждениях мы всегда пользуемся идеализированными модельными объектами: вместо тел рассматриваем материальные точки, нити – нерастяжимы, тела – абсолютно твердые. Модель является абстрактной системой, которая в упрощенном виде представляет исследуемую систему. Идеализация объекта, есть отвлечение от несущественного. Наша цель состоит в том, чтобы вскрыть закон, а закон это существенное в явлении. Поэтому при создании моделей принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи. Модели создаются на основе «физического подхода», а он вырабатывается в ходе решения задач. Чтобы решать задачи, необходимо знать теорию, к изложению которой мы и перейдем.

I. КИНЕМАТИКА

§1. Основные положения

Механика – наука о движении тел.

Совокупность тел, выделенная для рассмотрения, называется механической системой.

Механическое движение – процесс изменения взаимного расположения тел.

Пространство – форма существования материи. Пространство трехмерно – чтобы задать положение точки, необходимо задать три числа.

Система координат (декартова) – три взаимно перпендикулярных оси.

Время – свойство материальных процессов иметь определенную длительность (внутренняя характеристика процесса).

Тело отсчета – материальное тело, относительно которого определяется положение точек пространства.

Система координат вместе с телом отсчета и часами составляют систему отсчета.

Линия, вдоль которой движется тело, называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают движение: прямолинейное и криволинейное.

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой.

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел, без учета взаимодействия между ними. Все системы отсчета в кинематике равноправны. В кинематике различают прямую и обратную задачи.

Прямая задача кинематики – по заданному положению тела в пространстве в любой момент времени определить скорость и ускорение также в любой момент времени. Метод решения – дифференцирование по времени функции, определяющей положение тела в пространстве.

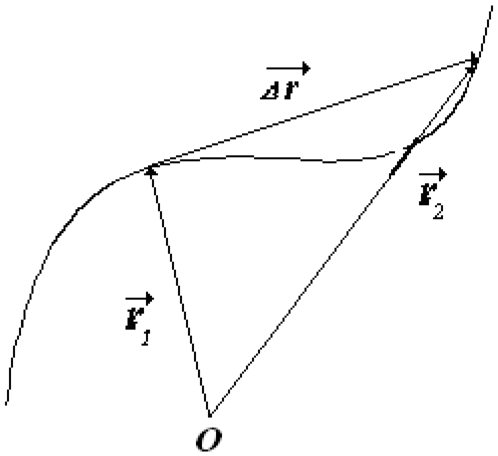
Обратная задача – по заданному ускорению, как функции времени, найти скорость и координаты или радиус-вектор частицы в любой момент времени. Метод решения – интегрирование по времени функций, определяющих ускорение и скорость. Для однозначного решения обратной задачи необходимо задать начальные условия, то есть начальное положение тела и его скорость в начальный момент времени.

Различают три способа задания движения: векторный, координатный и естественный.

Рассмотрим их более подробно.

§2. Векторный способ задания движения

а) Прямая задача кинематики: задана зависимость от времени радиус-вектора, характеризующего положение материальной точки $\vec{r}(t)$. Необходимо найти скорость $\vec{V}(t)$ и ускорение $\vec{w}(t)$.



$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} \,. \qquad (1.1)$$

Производные по времени в физике принято обозначать точкой над буквой.

Соотношение (1.1) определяет мгновенную скорость. Если нас интересуют средние значения, тогда:

$$< V(t) >= \frac{S}{\Delta t}, \qquad (1.2)$$

$$< \vec{V}(t) >= \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}, \qquad (1.3)$$

здесь S и $\Delta\vec{r}(t)$ – путь и перемещение тела за время Δt.

Ускорение (мгновенное) определяется из соотношения:

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.4)$$

Для определения средних значений ускорения можно воспользоваться формулами аналогичными (1.2) и (1.3).

б) Обратная задача кинематики: задано ускорение тела, как функция времени $\vec{w}(t)$, найти его скорость и радиус-вектор, если начальные условия имеют вид:

$$\vec{V}(0) = \vec{V}_0, \qquad \vec{r}(0) = \vec{r}_0 .$$

Умножив обе части равенства (1.4) на dt, получим:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}dt = d\vec{V} = \vec{w}(t)dt\,. \qquad (1.5)$$

Проинтегрируем с учетом начальных условий:

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}(t)} d\vec{V} = \int_0^t \vec{w}(t)dt\,. \qquad (1.6)$$

В случае равноускоренного движения $\vec{w} = const$, вместо (1.6) будем иметь:

$$\vec{V}(t) - \vec{V}_0 = \vec{w}t\,,$$

или

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{w}t\,. \qquad (1.7)$$

Далее, умножим (1.1) на dt и проинтегрируем:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{V}(t)dt\,. \qquad (1.8)$$

В случае равноускоренного движения, подставив (1.7) в (1.8) получим:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t (\vec{V}_0 + \vec{w}t)dt = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{w}t^2}{2}\,,$$

или

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{w}t^2}{2}\,. \qquad (1.9)$$

Соотношения (1.7) и (1.9) дают хорошо известные из школьного курса соотношения для равноускоренного движения. Если же $\vec{w} = \vec{f}(t)$ следует воспользоваться соотношениями (1.6) и (1.8).

Путь, пройденный телом, есть:

$$S(t) = \int_0^t \left|\vec{V}(t)\right| dt\,. \qquad (1.10)$$

§3. Координатный способ задания движения

а) Прямая задача кинематики: в декартовой системе координат заданы координаты материальной точки как функции времени, необходимо найти проекции скорости и ускорения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.11}$$

Поступая, как и в предыдущем случае, получим:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt}, \quad w_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt}, \quad w_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ V_z &= \frac{dz}{dt}, \quad w_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Соотношения (1.12) решают поставленную задачу. Модули векторов скорости и ускорения найдем, воспользовавшись определением:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \quad |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

От координатного способа задания движения можно перейти к векторному, вводя орты соответствующих осей: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \\ \vec{V}(t) &= V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}, \\ \vec{w}(t) &= w_x(t)\vec{i} + w_y(t)\vec{j} + w_z(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

б) Обратная задача кинематики: заданы проекции ускорения, необходимо найти проекции вектора скорости и координаты. Начальные условия имеют вид:

$$V_x(0) = V_{x0}; \quad x(0) = x_0.$$

Поступая, как и в случае рассмотрения векторного способа задания движения, найдем:

$$V_x(t) = V_{x0} + \int_0^t w_x(t)dt,$$
$$x(t) = x_0 + \int_0^t V_x(t)dt. \tag{1.13}$$

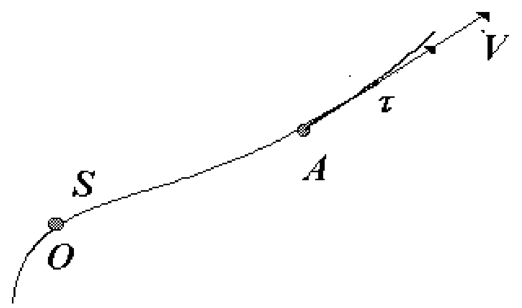
Аналогично для проекций y, z и V_y, V_z.

В случае равноускоренного движения вместо (1.13) по аналогии с (1.7) и (1.9) будем иметь:

$$V_x(t) = V_{x0} + w_x t,$$
$$x(t) = x_0 + V_{x0}t + \frac{w_x t^2}{2}. \tag{1.14}$$

Уравнение линии, вдоль которой движется тело, называется уравнением траектории. Если из (1.11) исключить время, получим уравнение траектории в явном виде. Уравнение (1.11) называют уравнением траектории в параметрическом виде.

§4. Естественный способ задания движения



Этот способ применяется тогда, когда заранее известна траектория точки, положение ее определяется дуговой координатой S, отсчитанной вдоль траектории от выбранного начала O. Движение определено, если известны: траектория, начало отсчета, положительное направление и закон движения $S(t)$.

Скорость при криволинейном движении можно записать в виде:

$$\vec{V} = V_\tau \vec{\tau}, \tag{1.15}$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории. Обозначим S – расстояние от начала отсчета до положения тела в произвольный момент времени отсчитанное вдоль траектории, т. е. путь пройденный телом. Тогда

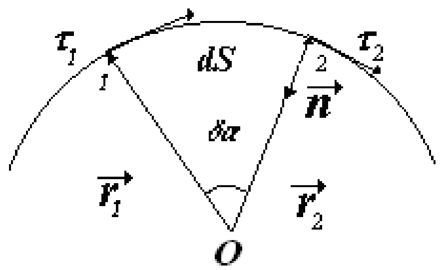
$$V_\tau = \frac{dS}{dt}; \qquad |\vec{V}| = |\vec{V}_\tau| = V_\tau .$$

Модуль вектора скорости равен его проекции на направление единичного вектора, касательного к траектории.

Ускорение по определению есть производная от вектора скорости. При дифференцировании необходимо учесть, что в процессе движения может меняться как модуль вектора скорости, так и направление вектора $\vec{\tau}$:

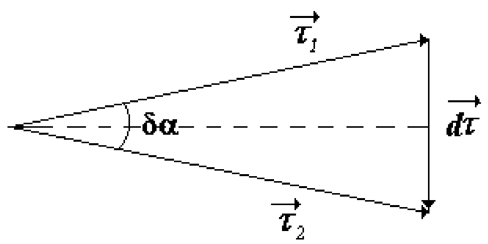
$$\vec{w} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \tag{1.16}$$

$\frac{dV_\tau}{dt} = w_\tau$ – характеризует изменение скорости по величине и называется тангенциальным ускорением, оно направлено по касательной к траектории. Рассмотрим второе слагаемое (1.16):



$$V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{dS}{dS} = V_\tau \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dS} = V_\tau^2 \frac{d\vec{\tau}}{dS}. \tag{1.17}$$

Чтобы понять смысл полученного результата, поступим следующим образом. Возьмем малый участок траектории, который можно рассматривать, как дугу некоторой окружности $r = r_1 = r_2$. За время dt частица перейдет из точки 1 в точку 2, пройдя путь dS, вектор $\vec{\tau}$, получит приращение $d\vec{\tau}$. Определим угол, на который повернется радиус-вектор: $\delta\alpha = \frac{dS}{r}$, с другой



стороны: $\sin\frac{\delta\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{1}{2}|d\vec{\tau}| = \frac{1}{2}\delta\alpha$.

Тогда $|d\vec{\tau}| = \frac{dS}{r}; \quad \frac{1}{r} = \frac{|d\vec{\tau}|}{dS}$.

Если длина дуги стремится к нулю $dS \to 0$, то вектор $d\vec{\tau}$ становится перпендикулярным к $\vec{\tau}$: $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ и, следовательно, вектор $d\vec{\tau}$ направлен по нормали к траектории, то есть $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{n}}{r}$.

Подставляя в (1.17) найдем:

$$V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V_\tau^2}{r}\vec{n} = w_n \vec{n}.$$

Эта составляющая ускорения всегда направлена к центру кривизны траектории и называется центростремительным ускорением, модуль которого равен: $w_n = \dfrac{V_\tau^2}{r}$. Полное ускорение запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\vec{w} = w_\tau \vec{\tau} + w_n \vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{r}\vec{n}, \\ &|w| = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \end{aligned} \qquad (1.19)$$

Величина $\dfrac{1}{r} = k$ называется кривизной, а r – радиусом кривизны траектории.

§5. Кинематика твердого тела

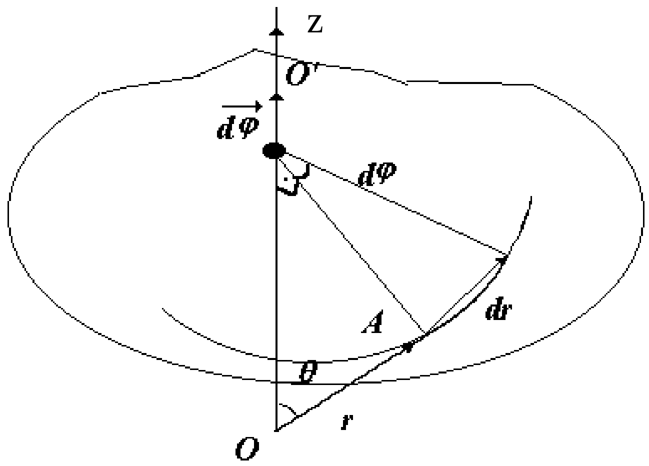
Твердым телом в механике называют тело, которое не деформируется под действием внешних сил, иными словами оно является абсолютно твердым.

Различают пять видов движения твердого тела: 1) поступательное; 2) вращательное вокруг неподвижной оси; 3) плоское движение; 4) движение вокруг неподвижной точки; 5) свободное движение.

Основными являются первые два вида движений, остальные можно свести к одному из них, или к их совокупности. Рассмотрим первые два вида движений.

1. Поступательное движение. Поступательным движением твердого тела называется такое, при котором все его точки движутся по одинаковым траекториям. Это обозначает, что скорости и ускорения точек в любой момент времени одинаковы. Любая прямая, проведенная между какими-либо точками тела, перемещается параллельно самой себе. Таким образом, это движение полностью характеризуется заданием движения какой-либо одной точки тела, т. е. эта задача сводится к задаче кинематики точки, способы решения которой приведены в предыдущих параграфах.

2. <u>Вращение вокруг неподвижной оси.</u> Вращательное движение вокруг неподвижной оси – это такое движение, при котором, по крайней мере, две точки тела остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки называется осью вращения. Все точки, лежащие на оси вращения неподвижны. Другие точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости, содержащие окружности, перпендикулярны к оси вращения.



Пусть твердое тело, вращаясь вокруг неподвижной оси *OO'*, за время dt совершило бесконечно малый поворот.

Соответствующий угол поворота будем характеризовать вектором $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, а направление связано с направлением вращения тела правилом правого винта, причем направлен этот вектор вдоль оси вращения.

Найдем элементарное перемещение любой точки *A* твердого тела при таком повороте. Положение точки А задается радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из точки *O* на оси вращения. (Точка *O* – начало системы отсчета, с целью упрощения рисунка, показана только ось *OZ*). Тогда линейное перемещение конца радиус-вектора r связано с углом поворота $d\varphi$ соотношением:

$$\left|d\vec{r}\right| = rd\varphi\sin\theta, \tag{1.20}$$

с учетом направления векторов можем написать:

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}\times\vec{r}\right]. \tag{1.21}$$

Равенство (1.21) справедливо лишь для бесконечно малого угла поворота, только такие углы можно рассматривать как векторы. Легко показать, что введенный вектор элементарного угла поворота удовлетворяет правилу векторного сложения.

Вектор $d\vec{\varphi}$ направлен вдоль оси вращения, его направление связано с направлением вращения, такие вектора называются аксиальными.

Вектор угловой скорости и ускорения можно ввести по аналогии с линейными характеристиками:

Угловая скорость:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.22}$$

По направлению $\vec{\omega}$ совпадает с $d\vec{\varphi}$.

Изменение угловой скорости со временем характеризуется вектором углового ускорения:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{1.23}$$

Направление вектора углового ускорения $\vec{\beta}$ совпадает с направлением приращения вектора угловой скорости $d\vec{\omega}$. Угловое ускорение $\vec{\beta}$, как и угловая скорость – аксиальный вектор.

Можно ввести проекции $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ на ось вращения, выбрав положительное ее направление в соответствии с правилом правого винта.

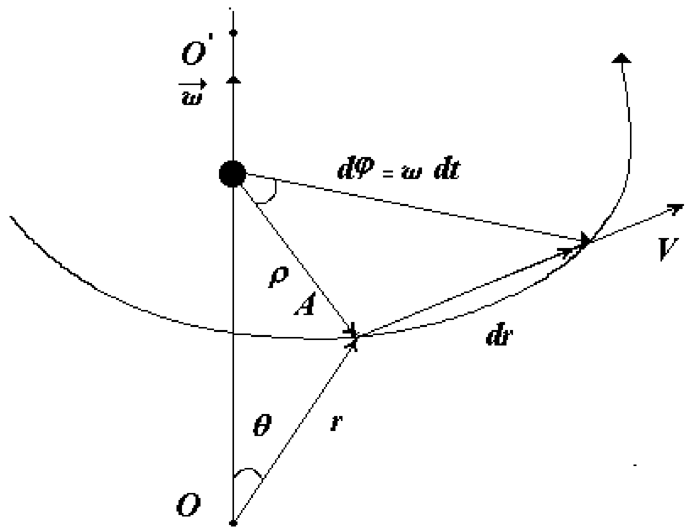
$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{1.24}$$

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}, \tag{1.25}$$

ω_z и β_z – алгебраические величины, их знак характеризует направление соответствующего вектора. Таким образом, зная $\varphi(t)$ можно, используя (1.24) и (1.25), найти ω_z и β_z в любой момент времени – аналог прямой задачи кинематики для твердого тела, естественно можно поставить и решить обратную задачу.

§6. Связь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками движения

Поставим вопрос об определении линейных характеристик вращательного движения. Пусть нас интересует линейная скорость $\vec{V}$ произвольной точки A твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной



оси *OO'* с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Положение точки *A* относительно точки *O* характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$. Воспользуемся формулой (1.21), разделив обе ее части на dt:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right]$$

или

$$\vec{V}(t) = \left[\vec{\omega}(t) \times \vec{r}\right]. \qquad (1.26)$$

Модуль линейной скорости есть

$$V = \omega r \sin\theta = \omega\rho,$$

где $\rho = r\sin\theta$ – радиус окружности, по которой движется точка *A*.

Продифференцировав (1.26) по времени, получим линейное ускорение произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{w}(t) = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right],$$

или

$$\vec{w}(t) = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\right]. \qquad (1.27)$$

Поскольку рассматривается случай неподвижной оси, угловое ускорение и угловая скорость тела параллельны друг другу $\vec{\beta} \| \vec{\omega}$, первое слагаемое (1.27) представляет собой тангенциальное ускорение, второе – нормальное.

$$w_\tau = \left|\left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right]\right| = \beta r \sin\theta = \beta\rho,$$
$$w_n = \left|\left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\right]\right| = \omega^2\rho.$$

Покажем, как получается последнее соотношение. Учитывая, что $\vec{V}(t) = [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}]$ и подставляя это значение в последнее соотношение, получим:

$$w_n = \left|[\vec{\omega} \times \vec{V}]\right| = \omega V = \omega^2 \rho,$$

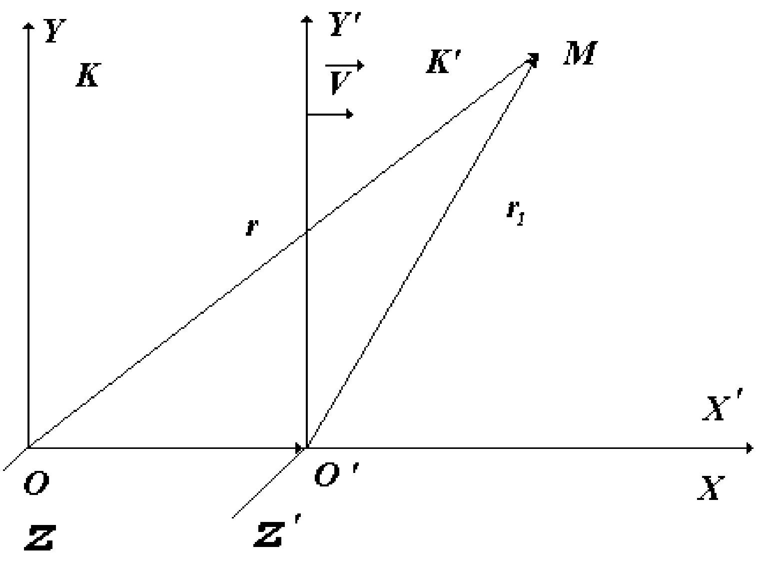
или можно воспользоваться определением двойного векторного произведения:

$$\begin{aligned}
&w_n = \left|\vec{\omega}\omega r\cos\theta - \vec{r}\omega^2\right| = \sqrt{\omega^4 r_x^2 + \omega^4 r_y^2 + (\omega^2 r\cos\theta - \omega^2 r_z)^2} = \\
&= \sqrt{\omega^4 r_x^2 + \omega^4 r_y^2} = \omega^2 \rho = \sqrt{\omega^4 r^2 (1 - \cos^2\theta)}, \\
&r_z = r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Модуль полного ускорения есть

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \rho\sqrt{\beta^2 + \omega^4}\,. \tag{1.28}$$

II. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



Пусть имеем две системы отсчета *К* и *К'*. Пусть система *К'* движется относительно системы *К* с постоянной скоростью $\vec{V}$ в направлении оси *X*. Оси в системах *К* и *К'* ориентированы как показано на рисунке. Предполагается, что система *К* – инерциальная, тогда и *К'* – инерциальная.

Система отсчета, в которой все свободные тела движутся равномерно и прямолинейно называется инерциальной.

Обобщив результаты изучения хода физических процессов в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, Галилей сформулировал принцип относительности: во всех инерциальных системах отсчета все **механические** явления протекают одинаково.

Этот принцип подтверждается всем многообразием приложений классической механики к движению тел, скорости которых значительно меньше скорости света.

Найдем формулы преобразования координат при переходе от неподвижной системы координат *К* к движущейся системе *К'*. Движущаяся система координат в каждый момент времени занимает определенное положение относительно неподвижной. Если начала обеих систем совпадают в начальный момент времени $t = 0$, то в момент t начало движущейся системы координат находится в точке $x = Vt$ неподвижной системы. Преобразования Галилея предполагают, что для координат и времени систем *К* и *К'* существует такое соотношение, какое существовало бы между ними, если бы эти системы в данный момент времени покоились друг относительно друга.

Пусть в момент времени t, движущаяся точка находилась в положении М. Ее положение определяется радиус-вектором $O\vec{M} = O\vec{O}' + O'\vec{M}$. За время t начало координат перешло из точки O в точку O', $O\vec{O}' = \vec{V}t$.

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t, \qquad t = t'\,. \tag{2.1}$$

В проекциях на координатные оси:

$$x = x' + Vt', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t'\,. \tag{2.2}$$

Формулы обратных преобразований легко получить из принципа относительности. За неподвижную систему отсчета можно выбрать систему *K'*, тогда система *K* будет двигаться в противоположную сторону со скоростью $-\vec{V}$. Значит, обратное преобразование получим из соотношений (2.1) и (2.2) заменой $\vec{V} \to -\vec{V}$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t, \qquad t = t'. \tag{2.3}$$

В координатной форме:

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t\,. \tag{2.4}$$

Эти формулы дают решение постановленной задачи и называются <u>преобразованиями</u> <u>Галилея</u>.

Продифференцировав (2.1) по времени получим нерелятивистский закон сложения скоростей:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{V}\,, \tag{2.5}$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}\,.$$

Здесь учтено, что длительности событий в обеих системах отсчета совпадают. Иными словами, время инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея.

Продифференцировав (2.5), с учетом того, что $\vec{V} = const$, получим

$$\vec{w} = \vec{w}\,', \qquad (2.6),$$

то есть ускорение <u>инвариантно</u> <u>относительно</u> <u>преобразований</u> <u>Галилея.</u>

§7. Принцип относительности Эйнштейна

Специальная теория относительности (СТО) строится на двух основных принципах или постулатах:

1. Законы, согласно которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух систем отсчета, движущихся одна относительно другой равномерно и прямолинейно, относятся эти изменения.

Иными словами: основные законы физических явлений неизменны во всех инерциальных системах отсчета.

2. Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника.

На этих двух постулатах Эйнштейн построил всю СТО. В своей первой статье «К электродинамике движущихся тел» он формулировке этих принципов предпослал рассуждения об относительности одновременности. Мы поступим несколько иначе: сначала мы получим преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, которые будут удовлетворять этим постулатам (преобразования Лоренца), и уже затем вернемся к вопросу об одновременности.

Итак, пусть имеем две системы координат *К* и *К'*, в каждой из них имеется система синхронизированных часов. Учитывая, что пространство однородно и изотропно, время однородно и что в момент $t=0$ было $t'=0$ и начала систем координат совпадали, можем записать связь между координатами, если масштабы в обеих системах координат одинаковы, то

$$\begin{cases} y'=y, \quad z'=z \\ x'=\alpha(x-Vt)\,, \\ t'=\gamma t-\delta x \end{cases} \tag{2.7}$$

так как при $x'=0$ всегда $x=Vt$. При $V=0$ должно быть $\delta=0$, так как покоящиеся друг относительно друга часы идут с одинаковой скоростью, поэтому коэффициент δ должен быть пропорционален скорости $\delta=\gamma kV$, тогда:

$$\begin{cases} y'=y, \quad z'=z \\ x'=\alpha(x-Vt)\;. \\ t'=\gamma(t-kVx) \end{cases} \tag{2.8}$$

Используя принцип относительности, можем сразу записать обратное преобразование (изменив знак скорости движения системы на противоположный):

$$\begin{cases} y = y', \ z = z' \\ x = \alpha(x' + Vt') \\ t = \gamma(t' + kVx') \end{cases}. \tag{2.9}$$

Решим систему (2.8) относительно x и t и затем сравним полученный результат с соответствующими выражениями в (2.9):

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \alpha Vt \\ t' = \gamma t - \gamma kVx \end{cases}; \Rightarrow t = \frac{1}{\gamma}(t' + \gamma kVx);$$

$$x' = \alpha x - \alpha V\frac{1}{\gamma}t' - \alpha kV^2 x;$$

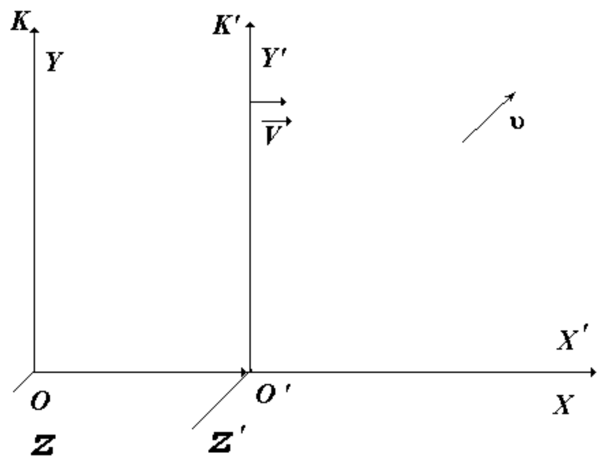
$$x' + \frac{\alpha V}{\gamma}t' = \alpha x(1 - kV^2).$$

Выражая отсюда x и сравнивая с выражением для x из (2.9), легко получить:

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma\alpha(1 - kV^2)}; \quad \frac{\alpha V}{\gamma\alpha(1 - kV^2)} = \alpha V;$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - kV^2}}; \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - kV^2}}. \tag{2.10}$$

Подставляя найденные выражения в (2.9), получим:



$$\begin{cases} y' = y, \ z' = z \\ x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - kV^2}} \\ t' = \dfrac{t - kVx}{\sqrt{1 - kV^2}} \end{cases} \tag{2.11}$$

Рассмотрим, как складываются скорости.

Тело имеет скорость v относительно системы К, какова его скорость относительно системы К', если система К' имеет по отношению к системе К скорость V :

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\dfrac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-kV^2}}}{\dfrac{\Delta t - kV\Delta x}{\sqrt{1-kV^2}}} = \frac{v-V}{1-kvV}\ . \tag{2.12}$$

Поскольку мы рассматриваем механическое движение, координаты должны быть вещественными, следовательно подкоренное выражение должно быть положительным $1-kV^2 \geq 0$, откуда следует существование предельной скорости $V \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}} = v_{\text{пред}}$.

Пусть в системе K частица имеет предельную скорость $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, найдем ее скорость в K': $v'_{\text{пред}} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{k}} - V}{1 - k\dfrac{1}{\sqrt{k}}V} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} = v_{\text{пред}}$, то есть во всех инерциальных системах отсчета предельная скорость одна и та же.

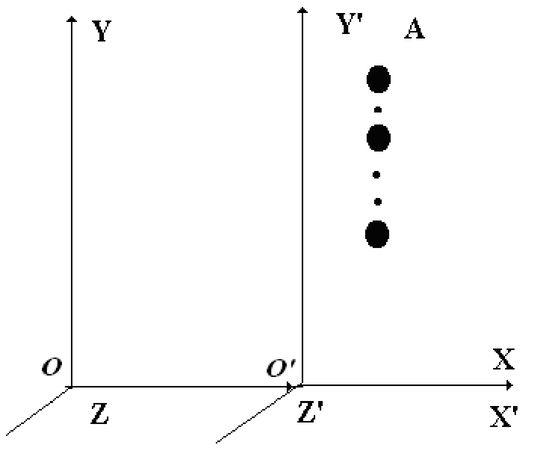
Из законов распространения электромагнитных волн следует, что скорость их распространения во всех системах одна и та же, в соответствии со вторым постулатом она не зависит от состояния движения источника, это скорость света в вакууме *с,* т. е. предельная скорость.

Из соотношений (2.11) в пределе $V \ll c$, легко получить преобразования Галилея, то есть они являются предельным случаем преобразований Лоренца, и, следовательно, Ньютонова механика – предельный случай механики Эйнштейна.

§8. Релятивистские эффекты

Замедление времени

Пусть в K-системе точка A покоится и в этой точке происходит некоторый процесс (например, капает вода). Измерим длительность этого процесса в K и K'-системах.



Воспользуемся преобразованиями Лоренца для времени:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - kV\Delta x}{\sqrt{1 - kV^2}}.$$

Так как точка в К-системе покоится, то $\Delta x = 0$. Тогда:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - kV^2}}. \qquad (2.13)$$

Заметим, что значения временных интервалов не должны зависеть от значений пространственных координат в любой системе отсчета, иначе мы бы могли изменять скорость хода часов, просто перемещая их в различные точки пространства одной и той же системы, но тогда нарушалась бы однородность пространства, и, кроме того, была бы невозможна синхронизация часов.

Анализируя формулу (2.13) видим, что длительность событий в различных системах – различна. Обозначим $\Delta t = \tau_0$ – время, измеренное неподвижными часами, $\Delta t' = \tau'$ – время, измеренное движущимися часами т. е.

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - kV^2}}. \qquad (2.14)$$

Время, измеренное неподвижными часами, называется собственным временем. Тогда:

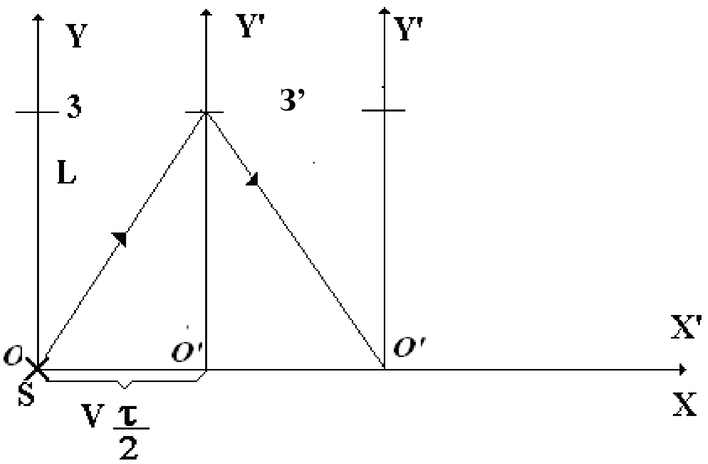
Интервал времени, измеренный в движущейся системе длиннее интервала в покоящейся системе.

То есть движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся. Слово замедление означает удлинение интервала времени.

Подтверждением этого эффекта служат эксперименты с μ-мезонами, которые появляются в результате распада π-мезонов и момент рождения μ-мезона можно достаточно точно зафиксировать. Собственное время жизни μ-мезона: $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$с. Тогда максимальная длина его пробега должна быть равна $l_{\max} \approx 3 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \approx 6 \cdot 10^4$ с$м$ $= 600\,м$.

Истинная длина пробега $l_{экс}$ значительно больше.

Покажем, что явление замедления времени является следствием инвариантности скорости света. Поместим в системе отсчета К эталонные часы. Эти часы будем использовать для определения интервала времени τ_0, за которое световой сигнал проходит расстояние от неподвижного источника S до неподвижного зеркала З и обратно. Пусть луч движется вдоль оси y. Тогда:



$$\tau_0 = \frac{2L}{c}.$$

Такое время покажут неподвижные в *К*-системе часы. Время прохождения сигнала можно измерить в системе *К'*, движущейся относительно *К* со скоростью V в направлении оси *X*. Путь, проходимый светом в системе *К'* длиннее, так как за время прохождения сигнала от источника к зеркалу З' источник и зеркало сместятся на расстояние $V \cdot \frac{\tau}{2}$ и за время движения в обратном направлении еще на такое же расстояние, здесь τ – время измеренное в движущейся системе. Тогда полный путь L' в соответствии с рисунком будет равен

$$L' = 2(L^2 + \frac{V^2\tau^2}{4})^{1/2}.$$

Это расстояние должно быть равно $c\tau$, так как световой сигнал всегда движется со скоростью *c*. Следовательно

$$(c\tau)^2 = 4L^2 + V^2\tau^2$$

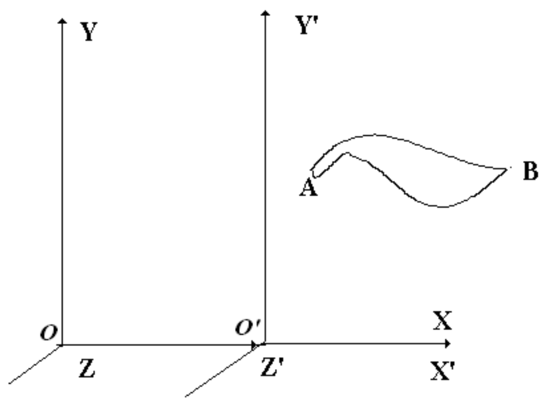
или

$$\tau = \frac{2L}{(c^2 - V^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c}\frac{1}{(1-\frac{V^2}{c^2})^{1/2}}.$$

Учитывая, что $\frac{2L}{c}=\tau_0$, получаем выражение (2.14), связывающее длительности событий в движущейся и неподвижной системах координат

$$\tau=\frac{\tau_0}{(1-\frac{V^2}{c^2})^{1/2}}.$$

Сокращение длины



Пусть некое тело, размер которого в X – направлении АВ, покоится в K – системе. Длина его в этой системе отсчета

$$l_0=X_b-X_a,$$

в K' системе отсчета

$$l'=X'_b-X'_a.$$

Используя преобразования Лоренца, получим:

$$l'=\frac{l_0-V(t_b-t_a)}{\sqrt{1-kV^2}}. \qquad (2.15)$$

Определение координат начала и конца нужно производить одновременно, по движущимся часам.

Тогда

$$\Delta t'=0=\frac{\Delta t-kV\Delta x}{\sqrt{1-kV^2}}. \qquad (2.16)$$

Откуда

$$\Delta t=kV\Delta x=kVl_0. \qquad (2.16a)$$

Соотношения (2.16, 2.16а) показывают, что одновременность событий относительна. Подставим (2.16а) в (2.15).

$$l' = \frac{l_0\left(1-kV^2\right)}{\sqrt{1-kV^2}} = l_0\sqrt{1-kV^2}\,. \tag{2.17}$$

Длина, измеренная неподвижной относительно предмета линейкой, называется собственной, эта длина максимальна. Таким образом, длина движущегося тела сокращается.

$$l' = l_0\sqrt{1-kV^2}\,. \tag{2.18}$$

В классической ньютоновой механике время было инвариантно относительно преобразований Галилея, возникает вопрос: существуют ли инварианты относительно преобразований Лоренца. Не вдаваясь в подробности, скажем, что инвариантом является величина, называемая интервалом

$$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2\,.$$

Существуют времениподобные и пространственноподобные интервалы.

$S^2 > 0$ – пространственноподобный интервал.

$S^2 = \Delta r^2 - c^2\Delta t^2 > 0$ – события могут происходить одновременно в различных точках пространства, но не существует такой системы отсчета, где бы они происходили в одной точке. Это имеет место для причинно не связанных событий.

$S^2 < 0$ – времениподобный интервал.

$S^2 = \Delta r^2 - c^2\Delta t^2 < 0$ – существует такая система отсчета, в которой события происходят последовательно в одной и той же точке пространства, но нет системы, где бы они могли произойти одновременно. Времениподобным интервалом разделены причинно связанные события.

$S^2 < 0$ – называется нулевым или светоподобным интервалом, события связаны световым сигналом $\Delta r^2 = c^2\Delta t^2$.

III. ДИНАМИКА

§9. Закон механического движения

Сущность движения – взаимодействие тел.

Мера взаимодействия – сила.

Раздел механики, изучающий движение с учетом причин его вызывающих, называется динамикой.

Вся классическая механика базируется на трех законах Ньютона.

В динамике, в отличие от кинематики, не все системы отсчета равноправны.

Первый закон Ньютона устанавливает факт существования выделенного класса систем отсчета. Он формулируется следующим образом.

Существуют такие системы отсчета, в которых тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано. Такие системы отсчета называются инерциальными системами отсчета.

Назовем импульсом материальной точки вектор, равный произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{V}\,.$$

Сущность физического явления всегда выражается законом. Одним из фундаментальных обобщений классической механики является установление соотношения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,, \tag{3.1}$$

где $\vec{F} = f(\vec{r}, \vec{V}, t)$ – сила.

Скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе. Это положение называется вторым законом Ньютона. Он справедлив в инерциальных системах отсчета. Если на тело действует несколько сил, то под $\vec{F}$ в (3.1) следует понимать равнодействующую этих сил.

Отклик тела на действующую силу, определяется его массой, которая является мерой инертности тела.

Как в кинематике, все задачи динамики можно разбить на два класса: 1) по заданному движению тел вычислить силы, действующие на них; 2) по заданным силам определить движение тел.

Задачи первого типа просты, они сводятся к нахождению ускорений материальных точек, из которых состоит система.

Задачи второго типа много сложнее и являются основными в механике. Их решение сводится к интегрированию дифференциальных уравнений, для однозначного решения которых необходимо задать начальные условия.

§10. Применение основного закона динамики

Взаимодействие тел определяет вид сил. В механике основными видами сил являются следующие:

а) $m\vec{g}$ – однородная сила тяжести (постоянная сила);

б) $\gamma\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ – сила гравитационного взаимодействия;

в) $-\lambda\vec{V}$ – сила вязкого трения;

г) $-k\vec{r}$ – сила упругости;

д) $\dfrac{q^2\vec{r}}{r^3}=\dfrac{q^2}{r^2}\vec{e}_r$ – сила Кулона;

е) $q\left[\vec{V}\cdot\vec{B}\right]$ – сила Лоренца.

Рассмотрим движение тел при наличии тех или иных сил.

1. $\vec{F}=0$. Свободное тело, либо тело, действие на которое всех сил, скомпенсировано.

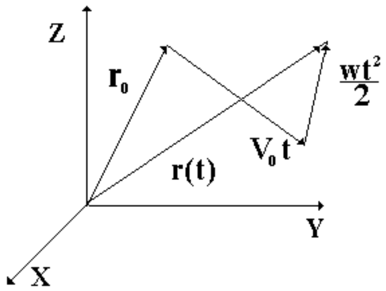
$\dfrac{d\vec{p}}{dt}=0$, при постоянной массе тела $m=const$, скорость тела будет постоянной $\vec{V}=const$, то есть в этом случае тело движется равномерно и прямолинейно.

Может быть $\vec{F}\neq 0$, но $F_x=0$, тогда вдоль оси X движение равномерное, а в других направлениях нет (например, движение тела, брошенного под углом к горизонту).

2. $\vec{F}=const$. Равноускоренное движение. При постоянной массе $m=const$ имеем

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\vec{F}}{m}=\vec{w}=const.$$

Получаем дифференциальное уравнение, решая его, как в случае обратной задачи кинематики, с учетом начальных условий $\vec{r}(0)=\vec{r}_0, \quad \vec{V}(0)=\vec{V}_0$, получим:

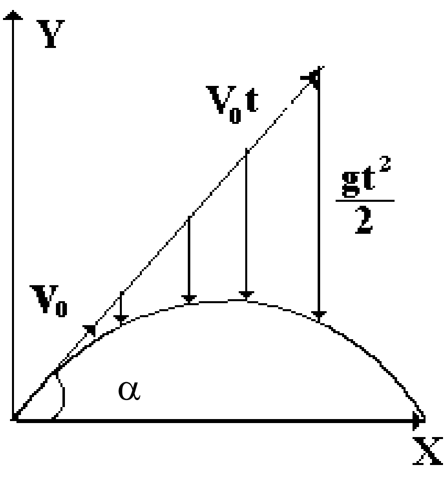


$$\vec{V}(t)=\vec{V}_0+\vec{w}t,$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{V}_0t+\frac{\vec{w}t^2}{2}.$$

На рисунке вектор $\vec{r}(t)$ представлен в виде суммы трех векторов $\vec{r}_0$, $\vec{V}_0t$ и $\frac{\vec{w}t^2}{2}$. Причем учтено, что в общем случае, все три вектора могут быть направлены произвольным образом.

К такому типу движения относится движение в однородном поле тяжести тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью V_0. Спроектировав полученные соотношения на координатные оси, получим систему уравнений, описывающих рассматриваемое движение.



$$y(t)=V_{0y}t+\frac{w_yt^2}{2},$$

$$x(t)=V_{0x}t,$$

$$w_y=-g,$$

$$\vec{r}(t)=\vec{V}_0t+\frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Здесь мы имеем сложение равномерного и равноускоренного движений. $\vec{V}_0t$ направленно по касательной к начальной точке траектории, $\frac{\vec{g}t^2}{2}$ – противоположно оси OY. Действие силы тяжести как бы сносит тело вниз. Чем больше время, тем больше снос. Если исключить время, получим уравнение траектории:

$$y = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Очевидно, это парабола со смещенной из начала координат вершиной и обращенными вниз ветвями.

Аналогично рассматривается движение заряда в однородном электрическом поле. Сила, действующая на заряд q, есть $\vec{F} = q\vec{E}$.

3. Рассмотрим движение под действием переменных сил.

3.а. Силы, зависящие от времени $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t).$$

Разделяя переменные и интегрируя, с учетом того что начальная скорость тела равна нулю, найдем

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{m}\int \vec{F}(t)dt.$$

Откуда видно, что для получения решения в явном виде функция $\vec{F}(t)$ должна быть задана. Определение $\vec{r}(t)$ после того как $\vec{V}(t)$ найдено труда не представляет, поскольку задача сводится ко второй части обратной задачи кинематики.

3.б. Силы, зависящие от скорости $\vec{F} = \vec{F}(\vec{V})$.

Начнем с силы Лоренца $\vec{F}_{\cdot} = q\left[\vec{V} \cdot \vec{B}\right]$.

Здесь q – заряд частицы, $\vec{B}$ – индукция однородного магнитного поля. Из уравнения видно, что ускорение все время в процессе движения перпендикулярно к скорости $\dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{w} \perp \vec{V}$. Такая сила меняет только направление скорости, но не ее величину. Частица движется по окружности с постоянной по модулю скоростью. В этом случае ускорение частицы равно нормальному ускорению и может быть представлено в виде:

$$w_n = \omega V.$$

Если $\vec{V} \perp \vec{B}$, то $w_n = \dfrac{q}{m}BV$, откуда $\omega = \dfrac{qB}{m}$.

Эта частота называется циклотронной частотой. С такой частотой движутся частицы в ускорителе, который называется циклотроном. При $\vec{B}=const$ будет и $\omega=const$.

Рассмотрим движение под действием только силы вязкого трения:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=-\lambda\vec{V}.$$

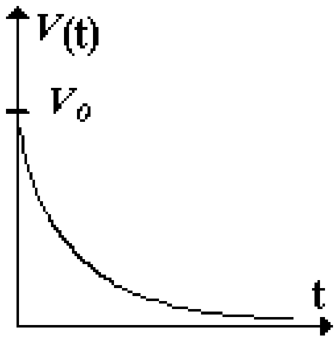
При $V_0=0$, $\frac{d\vec{V}}{dt}=0$, тело будет покоиться, то есть сила трения не может вывести тело из состояния покоя. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int\limits_{V_0}^{V}\frac{dV}{V}=-\frac{\lambda}{m}\int\limits_{0}^{t}dt \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{V}{V_0}=-\frac{\lambda}{m}t$$

или

$$V(t)=V_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}.$$

Учитывая, что $V(t)=\frac{dr(t)}{dt}$, разделяя переменные и интегрируя с учетом начальных условий, получим:



$$r(t)=r_0+V_0\frac{m}{\lambda}(1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}).$$

Выражение для $r(t)$ получить самостоятельно. Скорость есть убывающая функция, как и должно быть, в случае действия только силы трения. На рисунке представлен график зависимости $V(t)$.

3.в. Рассмотрим силы, зависящие от положения тела: $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$.

В качестве примера рассмотрим силу упругости: $\vec{F}=-k\vec{r}$.

Учитывая что $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, получим уравнение второго порядка

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-k\vec{r}.$$

В одномерном случае

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

или

$$m\frac{dV}{dt} = -kx\,.$$

В этом уравнении три неизвестных величины V, x, t. Чтобы разделить переменные исключим из него время, учитывая что $V = \frac{dx}{dt}$, выразим отсюда dt: $dt = \frac{dx}{V}$ и подставим его в последнее уравнение:

$$mVdV = -kxdx\,.$$

Проинтегрировав с учетом начальных условий $V(0) = V_0$, $x(0) = x_0$, получим:

$$V = \sqrt{V_0^2 - \frac{k}{m}(x^2 - x_0^2)}\,.$$

Это зависимость скорости от координаты. Чтобы найти зависимость скорости от времени $V(t)$, необходимо сначала определить зависимость координаты от времени $x(t)$, решив уравнение $V = \frac{dx}{dt}$, подставив сюда найденное значение $V(x)$ и разделив переменные.

Решение провести самостоятельно для случая $x_0 = 0$. Ответ очевиден, так как это колебательное движение: $x(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота колебаний.

Второй закон Ньютона, записанный в форме (3.1) сохраняется в неизменном виде в теории относительности, если подставить в него релятивистское выражение для импульса:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ , \tag{3.2}$$

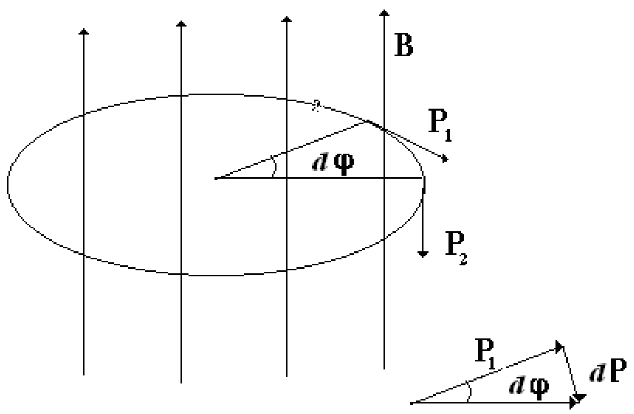
m_0 – масса покоя.

Рассмотрим частицу, движущуюся в ускорителе. Магнитное поле перпендикулярно плоскости движения частицы. Запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = eB\,V,$$
$$dp = pd\varphi.$$

Тогда

$$p\frac{d\varphi}{dt} = eVB. \tag{3.3}$$



Учитывая, что $\omega = {}^{d\varphi}\!/_{dt} = {}^{2\pi}\!/_{T}$, перепишем (3.3) в виде

$$p\frac{2\pi}{T} = eVB$$

или

$$T = \frac{2\pi}{Be}\frac{p}{V}. \tag{3.4}$$

Если бы импульс был пропорционален скорости (p~V), то период обращения электрона был бы постоянным, при постоянном B. Однако эксперимент показывает, что при больших энергиях период увеличивается с увеличением энергии. Чтобы он оставался постоянным, необходимо чтобы магнитное поле изменялось по закону $B = \dfrac{B_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, что и подтверждает соотношение (3.2), и тем самым теорию относительности.

§11. Движение системы тел

Рассмотрим систему двух взаимодействующих материальных точек. Из опыта известно, что силы взаимодействия между ними направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки. Для рассмотрения систем взаимодействующих тел Ньютон сформулировал третий закон:

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Одну из сил называют действием, другую противодействием. Тогда третий закон Ньютона можно сформулировать таким образом: всякому действию, соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

В случае системы произвольного числа материальных точек взаимодействие сводится к попарному взаимодействию между материальными точками. То есть они взаимодействуют так же как и в отсутствие всех других материальных точек. Пусть $\vec{F}_{ik}$ – сила, с которой i-тая материальная точка, действует на k-тую, $\vec{F}_{ki}$ – наоборот, причем в соответствии с третьим законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Третий закон Ньютона позволяет перейти от механики отдельной частицы к механике системы материальных точек.

Силы, действующие на материальные точки системы, можно разделить на внутренние и внешние. Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками самой системы $\vec{F}_{ik}$. Внешние силы – это такие, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела.

Обозначим $F_1^{(i)}$ – полную внутреннюю силу, действующую на первую частицу (intra), $F_1^{(e)}$ – полную внешнюю силу, действующую на ту же частицу (extra). Тогда для второй соответственно будет $F_2^{(i)}$ и $F_2^{(e)}$ и так далее. Запишем второй закон Ньютона для каждой частицы:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_1^{(e)},$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2^{(i)} + \vec{F}_2^{(e)} \,. \tag{3.5}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Сложив почленно эти уравнения и учтя, что все внутренние силы попарно компенсируются, получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n) = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \ldots + \vec{F}_n^{(e)}.$$

Здесь мы учли, что сумма импульсов частиц, составляющих систему равна полному импульсу системы. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)}. \qquad (3.6)$$

Таким образом, производная по времени от импульса системы материальных точек равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Если $\sum \vec{F}_i^{(e)} = 0$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ и значит $\vec{p} = const$. Итак, если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется, то есть не меняется со временем. Это утверждение называется <u>законом сохранения импульса</u>. В частности, это имеет место, когда система замкнута. Уравнение (3.6) векторное, оно эквивалентно трем скалярным

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum F_{ix}^{(e)}.$$

Если $\sum \vec{F}_i^{(e)} \neq 0$, а $\sum F_{ix}^{(e)} = 0$, то отсюда следует, что сохраняется X-компонента импульса.

Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства и надлежащим образом обобщенный, является фундаментальным законом природы, не знающим исключений.

Движение тел определяется силами взаимодействия. Основные типы взаимодействий в природе:

1. Гравитационное – дальнодействующее. Обращается в нуль, только при бесконечном расстоянии между взаимодействующими телами. Управляет взаимодействием массивных тел.

2. Электромагнитное – дальнодействующее. Также обращается в нуль на бесконечности. Управляет взаимодействием заряженных тел.

3. Сильное – короткодействующее. Управляет взаимодействием нуклонов в ядре. Проявляется на расстояниях порядка размеров ядра.

4. Слабое – короткодействующее. Управляет взаимодействием и распадом элементарных частиц, проявляется на расстояниях порядка размеров частиц.

§12. Теорема о движении центра масс

В нерелятивистской механике, где $m \neq f(\vec{V})$ импульс системы $\vec{p} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \ldots + m_n\vec{V}_n$ может быть выражен через скорость ее центра масс.

Центром масс или центром инерции системы материальных точек называется такая воображаемая точка, радиус вектор которой $\vec{R}$, выражается через радиусы векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ материальных точек по формуле:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}. \tag{3.7}$$

Продифференцируем (3.7) по времени и умножим на полную массу системы $m = \sum m_i$. Для упрощения записи производные по времени в физике принято обозначать точками над соответствующими буквами, тогда получим:

$$m\dot{\vec{R}} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 + \ldots + m_n\dot{\vec{r}}_n,$$

или

$$m\vec{V} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \ldots + m_n\vec{V}_n,$$

где $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ – скорость центра масс системы, таким образом, полный импульс системы материальных точек можно выразить через скорость ее центра масс:

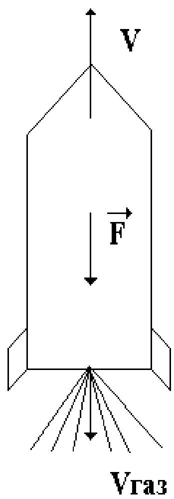
$$\vec{p} = m\vec{V}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.6) получим:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\sum\vec{F}_i^{(e)}.$$

Отсюда следует: центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила – геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Это утверждение называется теоремой о движении центра масс системы.

§13. Реактивное движение. Уравнение Мещерского, формула Циолковского



Рассмотрим движение тела с переменной массой на примере ракеты, которая движется в поле внешних сил. Ракета с большой скоростью выбрасывает газ, образующийся при сгорании топлива, воздействуя на него с большой силой, поскольку в камере сгорания устанавливается высокое давление. Выбрасываемое вещество, в соответствии с третьим законом Ньютона, с той же, но противоположно направленной силой действует на ракету и сообщает ей ускорение в противоположном направлении.

Пусть $m(t)$ – масса ракеты в произвольный момент времени t, $\vec{V}(t)$ – ее скорость соответственно. Импульс ракеты $m\vec{V}$. Через время dt он будет равен: $(m+dm)(\vec{V}+d\vec{V})$, при этом газ получил импульс $\vec{V}_{газ}dm_{газ}$. Из второго закона Ньютона следует, что изменение импульса ракеты, равно импульсу, действующей на нее силы:

$$(m+dm)(\vec{V}+d\vec{V})+\vec{V}_{газ}dm_{газ}-m\vec{V}=\vec{F}dt. \qquad (3.10)$$

Раскроем скобки и пренебрежем величинами второго порядка малости, тогда получим, с учетом того, что $dm_{газ}=-dm$:

$$md\vec{V}=(\vec{V}_{газ}-\vec{V})dm+\vec{F}dt, \qquad (3.11)$$

обозначив $\vec{V}_{газ} - \vec{V} = \vec{V}_{отн}$ – относительная скорость истечения газов из сопла ракеты, получим (после деления на dt):

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_{отн}\frac{dm}{dt} + \vec{F}. \qquad (3.12)$$

Уравнение (3.12) впервые было получено русским механиком Мещерским И. В. (1858–1935 гг.) и носит его имя. Первое слагаемое в правой части (3.12) называется реактивной силой. Ее величина определяется скоростью изменения массы системы.

Применим (3.12) к ракете, на которую не действуют внешние силы $\vec{F} = 0$:

$$md\vec{V} = \vec{V}_{отн}\,dm\,.$$

Пусть ракета движется прямолинейно в направлении противоположном газовой струе. Если ось X направить по направлению полета, то проекция $\vec{V}_{отн}$ будет отрицательной: $-V_{отн}$. Тогда

$$mdV = -V_{отн}dm,$$

или

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{V_{отн}}{m},$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dV}{V_{отн}}.$$

Рассмотрим случай, когда скорость газовой струи относительно ракеты не меняется

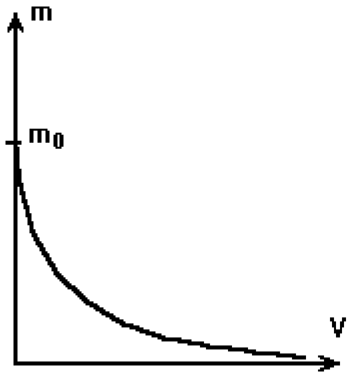
$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = -\frac{1}{V_{отн}}\int_{0}^{V}dV,$$

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{V}{V_{отн}}$$

или

$$m = m_0 e^{-V/V_{отн}}. \qquad (3.13)$$

Выражение (3.13) было впервые получено для случая нерелятивистского движения Циолковским К. Э. (1857–1935 гг.) и носит его имя.



<u>Пример.</u> Каким должно быть отношение масс $m_0 / m(V)$, чтобы сообщить ракете первую космическую скорость 8 км/с, при $V_{отн} = 1$ км/с.

$$\frac{m_0}{m(V)} = e^8 \approx 2980,$$

то есть масса топлива в 2980 раз превосходит массу ракеты, достигшей первой космической скорости. Иными словами, на каждый килограмм массы, достигшей первой космической скорости необходимо затратить 2980 килограммов топлива.

Если $V_{отн} = 2$ км/с.

Тогда $\dfrac{m_0}{m(V)} = e^4 = 54{,}6$.

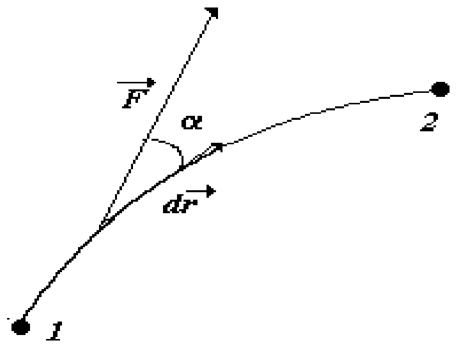
Такое соотношение является уже более реальным с точки зрения космическим полетов.

IV. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Если на движущееся тело действует сила, то в процессе движения она совершает работу. Работа величина скалярная, найдем ее.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение $\vec{F}$ на $d\vec{r}$.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\alpha dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{4.1}$$



В общем случае, если материальная точка проходит конечный путь от точки 1 до точки 2, его можно разбить на бесконечно малые участки и просуммировать, то есть, взять интеграл:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F} d\vec{r}). \tag{4.2}$$

Интеграл в (4.2) нужно брать вдоль траектории, по которой движется тело, такой интеграл называется <u>криволинейным</u>.

Если на тело действует несколько сил, то нужно говорить о работе равнодействующей этих сил. В случае двух сил равнодействующая равна $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, тогда $dA = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r}$, так как элементарная работа равнодействующей двух сил, равна сумме элементарных работ этих сил, это свойство называется свойством аддитивности. Очевидно, оно справедливо и для работ на конечных перемещениях.

Получим выражение для работы через величины, характеризующие тело. По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

тогда

$$dA = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \vec{V} d\vec{p} = dK. \tag{4.3}$$

В нерелятивистском случае $\vec{p} = m\vec{V}$, тогда при $m = const$

$$A = m\int_{V_1}^{V_2} \vec{V}d\vec{V} = m\int_{V_1}^{V_2} VdV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}. \qquad (4.4)$$

(Из векторного анализа известно, что $\vec{V}d\vec{V} = VdV$). V_1 и V_2 – начальная и конечная скорости частиц. Величина

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \qquad (4.5)$$

называется кинетической энергией тела, т. е. это энергия, которой обладает движущееся тело. Тогда (4.4) можно переписать в виде $A = K_2 - K_1$, то есть работа силы при перемещении частицы равна приращению кинетической энергии этой частицы. Это есть теорема об изменении кинетической энергии. Ее легко обобщить на случай системы материальных точек.

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий частиц, составляющих эту систему. Тогда приращение кинетической энергии системы равно суммарной работе всех сил, действующих на систему материальных точек.

Здесь очень важно слово «всех», то есть и внешних и внутренних, в отличие от второго закона Ньютона, где речь идет только о внешних силах, так как внутренние компенсируются.

Выражение (4.3) позволяет обобщить понятие работы на случай релятивистской механики, если воспользоваться релятивистским выражением для импульса:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} V.$$

Выразим отсюда скорость

$$p^2 = \frac{m_0^2 V^2}{1 - V^2/c^2} \Rightarrow p^2 - \frac{p^2 V^2}{c^2} = m_0^2 V^2,$$

$$p^2 = V^2 (m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}) .$$

Откуда

$$V = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + p^2 / c^2}}. \qquad (4.6)$$

Подставляя выражение для скорости (4.6) в выражение для элементарной работы (4.3) получим:

$$dA = \frac{pdp}{\sqrt{m_0^2 + p^2 / c^2}} = dE. \qquad (4.6а)$$

Здесь dE приращение полной энергии тела. Проинтегрируем (4.6а):

$$A = E - E_0 = \int \frac{pdp}{\sqrt{m_0^2 + p^2 / c^2}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 = K. \qquad (4.7)$$

Величина $E_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя, E – полная релятивистская энергия, часть, связанная с движением, называется релятивистской кинетической энергией. Выразим кинетическую энергию K через скорость, подставив в соотношение (4.7) выражение для релятивистского импульса:

$$K = \sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^2 V^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \qquad (4.8)$$

Формула (4.8) дает выражение для кинетической энергии в релятивистской механике, очевидно в пределе $V \ll c$, оно должно переходить в обычное выражение (4.5). Разложив знаменатель, получим:

$$K = m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{V^4}{c^4} + \ldots) - m_0 c^2 = \frac{m_0 V^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{m_0 V^4}{c^2} + \ldots, \qquad (4.9)$$

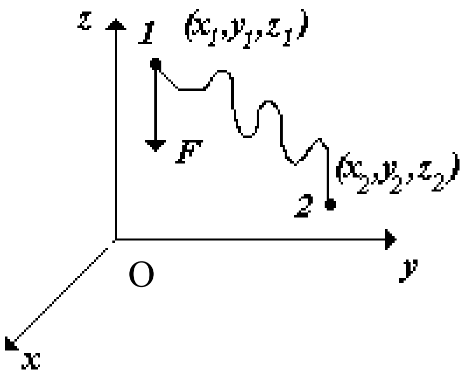
то есть с точностью до первых неисчезающих слагаемых, релятивистское выражение для кинетической энергии, переходит в классическое, поправки к этому выражению имеют порядок $\frac{V^2}{c^2}$.

§14. Закон сохранения энергии

Рассмотрим работу силы тяжести при перемещении тела из точки 1 в точку 2. Сила тяжести направлена вертикально вниз, в векторной форме ее можно представить в виде $\vec{F}=(0,0,-mg)$. При движении тела вдоль произвольной траектории на него могут действовать и другие силы, однако нас будет интересовать только работа силы тяжести.

Тогда, исходя из определения работы, получим

$$dA = F_z dz = -mgdz,$$
$$A_{12} = -\int_{(1)}^{(2)} mgdz = -mg(z_2 - z_1) = mgh. \qquad (4.10)$$



Таким образом, работа силы тяжести не зависит от пути, она определяется только начальным и конечным положением тела, такие силы называются консервативными или потенциальными. Можно дать другое определение: если $\oint dA = 0$, то сила потенциальна.

В поле потенциальных сил можно ввести понятие потенциальной энергии в данном положении – это работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в некоторое положение, принимаемое за нулевое, то есть такое, потенциальная энергия в котором принимается равной нулю.

Тогда

$$A = U_1 - U_2, \qquad (4.11)$$

то есть работа консервативной силы по перемещению тела, равна убыли его потенциальной энергии. В дифференциальной форме:

$$dA = -dU\,. \qquad (4.12)$$

Учитывая, что $dA = dK$ получим $dK = \text{-}dU$, или

$$d(K+U) = 0,$$

откуда

$$K + U = const.$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: в поле консервативных сил механическая энергия сохраняется. Это утверждение называется <u>законом сохранения механической энергии</u>.

Таким образом, если в замкнутой системе действуют только потенциальные силы, то механическая энергия сохраняется. Не всякая сила потенциальна, следовательно, механическая энергия может не сохраняться. То есть замкнутости системы недостаточно для выполнения закона сохранения механической энергии.

Закон сохранения энергии является фундаментальным законом природы, он является следствием однородности времени.

Если задан закон, по которому меняется в пространстве действующая сила $\vec{F}(\vec{r})$, то говорят, что задано силовое поле. Силовые поля бывают консервативные и неконсервативные. Условие консервативности приведено выше.

В качестве примера рассмотрим потенциальную энергию гравитационного притяжения двух материальных точек. Сила, действующая между ними, есть:

$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2},$$

где γ – гравитационная постоянная. Знак минус говорит о том, что по природе это сила притяжения. Сила гравитационного взаимодействия является центральной, то есть линия ее действия всегда проходит через силовой центр. Можно показать, что всякая центральная сила консервативна. Будем считать, что тело массы M неподвижно (силовой центр), а тело массы m перемещается из бесконечности в данную точку, тогда

$$A = -\int_{\infty}^{r} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr \to A = \int_{r}^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma \frac{Mm}{r}. \qquad (4.13)$$

По определению, эта работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = U_{\infty} - U(r). \qquad (4.14)$$

Принимая $U_\infty = 0$ и подставляя (4.13) в (4.14) получим:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Потенциальная энергия в любой конечной точке поля отрицательна, этот факт имеет простое объяснение. Максимальной энергией обладают притягивающиеся тела при бесконечном расстоянии между ними. В этом положении потенциальная энергия считается равной нулю. Во всяком другом положении она меньше, то есть отрицательна.

§15. Силы и потенциальная энергия

Взаимодействие тел можно описывать либо с помощью сил, либо с помощью потенциальной энергии как функции координат, взаимодействующих тел.

Естественно, что описание на языке сил обладает большей общностью, так как оно применимо и к непотенциальным силовым полям.

Зная силу как функцию координат материальных точек системы можно вычислить потенциальную энергию рассматриваемой системы в произвольной точке поля. Такая задача решается интегрированием. Пример приведен выше. Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих частиц. Эта задача решается дифференцированием.

Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$ материальной точки в поле консервативных сил $\vec{F}$, тогда:

$$\vec{F}d\vec{r} = -dU,$$

это равенство справедливо при любых $d\vec{r},$ если при этом $U(\vec{r})$ известно, то можно однозначно определить силу $\vec{F}.$ Действительно, по определению скалярного произведения:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \qquad (4.15)$$

С другой стороны dU это дифференциал функции нескольких переменных $U(x, y, z)$. По определению дифференциала:

$$dU = (\frac{dU}{dx})_{y,z}\,dx + (\frac{dU}{dy})_{x,z}\,dy + (\frac{dU}{dz})_{x,y}\,dz\,. \qquad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15) получим:

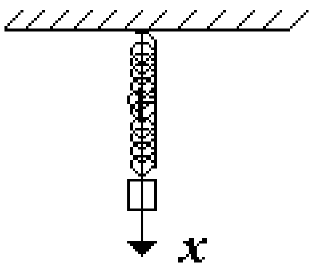
$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -[(\frac{dU}{dx})_{y,z}\,dx + (\frac{dU}{dy})_{x,z}\,dy + (\frac{dU}{dz})_{x,y}\,dz]. \qquad (4.17)$$

Сравнивая левые и правые части найдем:

$$F_x = -(\frac{dU}{dx})_{y,z},$$
$$F_y = -(\frac{dU}{dy})_{x,z}, \qquad (4.18)$$
$$F_z = -(\frac{dU}{dz})_{x,y}.$$

Таким образом, если потенциальная энергия $U(x, y, z)$ известна, то вычисление составляющих силы F_x, F_y, F_z сводится к вычислению частных производных.

Пример. Измеряя потенциальную энергию сжатой пружины, нашли,



что она равна $U = \frac{1}{2}kx^2$, где x – удлинение, k – постоянная величина. Закрепим один конец пружины, ось OX направим вдоль пружины, тогда сила, с которой пружина будет действовать на прикрепленное к другому ее концу тело:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx.$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена противоположно смещению. Соотношения (4.18) можно объединить в одно:

$$\vec{F} = -grad\,U = -\vec{\nabla}U\,, \qquad (4.19)$$

где символ grad или $\vec{\nabla}$ обозначает векторный дифференциальный оператор:

$$grad = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Он называется оператором Гамильтона, в результате его действия на скалярную функцию получается вектор.

§16. Столкновения

Столкновение – кратковременное взаимодействие тел. (Время действия мало по сравнению с характерным временем задачи, например, временем свободного движения).

Различают абсолютно упругий и неупругий удар.

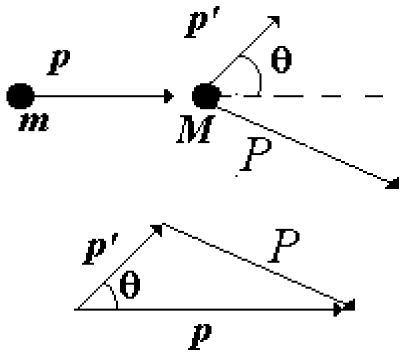
Абсолютно упругим называется столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии не меняются. Абсолютно упругое столкновение – это идеализация, в природе такого столкновения при взаимодействии макроскопических тел не встречается, однако бывают взаимодействия, довольно близкие к абсолютно упругим. Степень упругости взаимодействия можно характеризовать коэффициентом восстановления, который определяется отношением механической (кинетической) энергии после взаимодействия к энергии до взаимодействия.

$$\eta = \frac{K_2}{K_1}. \qquad (4.20)$$

Чем ближе η к 1, тем выше степень упругости взаимодействия, для абсолютно упругого взаимодействия η=1.

В процессе взаимодействия происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем при абсолютно упругом столкновении это превращение происходит без потерь.

Рассмотрим задачу об абсолютно упругом столкновении двух тел, причем будем считать, что они взаимодействуют только в момент соприкосновения, то есть, только в этот момент потенциальная энергия отлична от нуля, что одна из частиц до взаимодействия покоилась, это всегда можно сделать, связав с ней систему координат, и что все рассмотрение проводится в инерциальной системе отсчета.



Неподвижную частицу будем называть мишенью.

Угол θ, на который отклоняется налетающая частица, называется углом рассеяния. Найдем зависимость импульса налетающей частицы после взаимодействия p' от угла рассеяния. Импульс мишени после взаимодействия $\vec{P}$.

Систему взаимодействующих частиц будем считать замкнутой. В нижней части рисунка представлена векторная диаграмма, иллюстрирующая закон сохранения импульса.

Поскольку взаимодействие абсолютно упругое, имеют место законы сохранения механической энергии и импульса

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{P} \\ E_1 = E_1' + E_2' \end{cases}. \qquad (4.21)$$

Будем считать, что масса в процессе движения не изменяется. Тогда

$$E_2' = \frac{P^2}{2M} = \frac{(\vec{p} - \vec{p}\,')^2}{2M} = E_1 - E_1' = \frac{p^2}{2m} - \frac{p'^2}{2m}. \qquad (4.22)$$

Найдем P^2, используя (4.21) и (4.22)

$$P^2 = \frac{M}{m}(p^2 - p'^2) = (\vec{p} - \vec{p}\,')^2 = p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2. \qquad (4.23)$$

Откуда

$$p'^2(1 + \frac{M}{m}) - 2pp'\cos\theta + p^2(1 - \frac{M}{m}) = 0,$$

$$p' = \frac{p\cos\theta \pm \sqrt{p^2\cos^2\theta - p^2(1 - \frac{M^2}{m^2})}}{1 + \frac{M}{m}}.$$

Или окончательно

$$p' = p\frac{\cos\theta \pm \sqrt{\dfrac{M^2}{m^2} - \sin^2\theta}}{1 + \dfrac{M}{m}}. \tag{4.24}$$

Исследуем (4.24) в различных предельных случаях.

1. Масса мишени больше массы налетающей частицы $\frac{M}{m} > 1$, физический смысл имеет только знак «+», так как в противном случае $p' < 0$, а по смыслу p' положительно определено.

Найдем значения импульса налетающей частицы после взаимодействия от угла рассеяния:

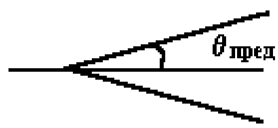
$$a)\ \Theta = 0, p = p', P = 0;$$

$$b)\quad \theta = \frac{\pi}{2}, p' = p\frac{\sqrt{\dfrac{M^2}{m^2} - 1}}{1 + \dfrac{M}{m}} = p\sqrt{\frac{\dfrac{M}{m} - 1}{\dfrac{M}{m} + 1}} < p;$$

$$c)\quad \theta = \pi, p' = p\frac{\dfrac{M}{m} - 1}{\dfrac{M}{m} + 1} < p. \tag{4.25}$$

Таким образом, в случае когда масса мишени больше массы налетающей частицы, возможны любые углы рассеяния, в том числе и рассеяние назад. Именно такой результат получил Резерфорд исследуя рассеяние альфа частиц на золотой фольге. Тщательное исследование результатов этого эксперимента позволило Резерфорду предложить правильную модель атома.

2. Масса мишени меньше массы налетающей частицы $\frac{M}{m} < 1$, в этом случае существует предельный угол рассеяния. Так как значение импульса в реальном физическом процессе p' не может быть комплексным, подкоренное выражение в (4.24) должно быть положительным $\frac{M^2}{m^2} - \sin^2\theta \ge 0$; тогда $\sin\theta_{\text{пред}} = \frac{M}{m}$.



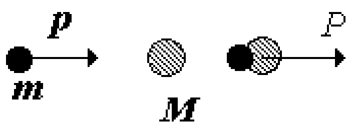
<u>Неупругие столкновения</u> – это такие, в процессе которых механическая энергия не сохраняется, или иначе: изменяется внутренняя энергия взаимодействующих тел.

Частным случаем является абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и дальше движутся как единое целое. Примером может служить столкновение пластилиновых шаров.

В процессе неупругих столкновений потери механической энергии происходят в результате действия диссипативных сил. Физика столкновения довольно сложна – в процессе взаимодействия возникают силы упругости, силы вязкого трения, в телах возбуждаются колебания и волны и так далее. Однако, в случае абсолютно неупругого удара, все эти процессы в конце концов прекращаются и тела движутся как единое целое.

Взаимодействующие тела можно рассматривать как замкнутую систему, но наличие диссипативных сил приводит к несохранению механической энергии, импульс, тем не менее, сохраняется.

Рассчитаем потери энергии при абсолютно неупругих взаимодействиях.



Пусть частица массы m, имеющая импульс p, сталкивается с покоившейся частицей массы M. Найти потери механической энергии. Импульс системы после взаимодействия равен импульсу налетающей частицы $\vec{p} = \vec{P}$. Потери энергии определяются как разность между начальным и конечным ее значениями

$$E_н = \frac{p^2}{2m}; \quad E_к = \frac{P^2}{2(M+m)} = \frac{p^2}{2(M+m)};$$

$$\Delta E = E_н - E_к = p^2 \frac{M}{2m(m+M)} = E \cdot \frac{M}{(m+M)}. \qquad (4.26)$$

Относительные потери:

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_н} = \frac{M}{m+M} = \frac{1}{1+\dfrac{m}{M}}.$$

При $\dfrac{m}{M}=\dfrac{1}{10}, \eta=\dfrac{10}{11}\cong 90\ \%$, то есть 90 % энергии теряется неупруго. Из (4.26) видно, что величина максимальной энергии, превращаемой в другие формы, зависит от соотношения масс, в пределе $M\to\infty$ (соударение со стеной) вся начальная энергия теряется неупруго.

В общем случае, когда до взаимодействия обе частицы движутся с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, для потерь получим:

$$\Delta E=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2M}-\frac{(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2}{2(m+M)}.$$

Откуда после простых преобразований найдем:

$$\Delta E=\frac{mM}{2(m+M)}(\vec{V}_1-\vec{V}_2)^2=\frac{\mu}{2}(\vec{V}_1-\vec{V}_2)^2. \qquad (4.27)$$

Здесь $\mu=\dfrac{mM}{(m+M)}$ – приведенная масса взаимодействующих частиц. Таким образом, потери определяются приведенной массой и квадратом относительной скорости частиц до взаимодействия.

Неупругое столкновение тел всегда сопровождается потерей кинетической энергии макроскопического движения.

§17. Рассеяние на зеркальном шаре

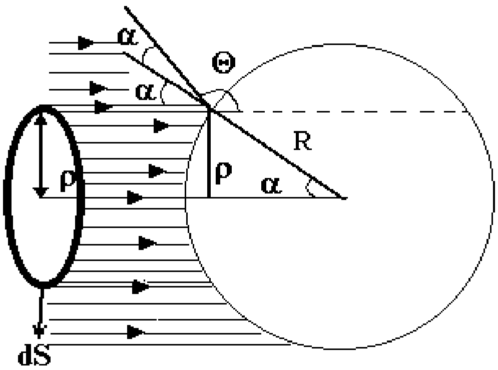
В процессе рассеяния не все значения углов равновероятны. Распределение числа рассеянных частиц в зависимости от угла рассеяния характеризуется сечением рассеяния. Для характеристики сечения рассеяния вводят дифференциальное сечение рассеяния: отношение числа частиц, рассеянных в элемент телесного угла $d\Omega$ к плотности потока частиц:

$$d\sigma=\frac{dN}{j},$$

где dN – число частиц, рассеянных в элемент телесного угла $d\Omega$;

j – плотность потока частиц – число частиц, проходящих через единичную площадку перпендикулярную скорости движения частиц в единицу времени.

Рассмотрим рассеяние частиц на абсолютно твердом шаре радиусом R. Найдем дифференциальное сечение рассеяния.



Угол рассеяния $\theta = \pi - 2\alpha$, так как угол падения, равен углу отражения. ρ – прицельный параметр, это минимальное расстояние на котором прошла бы налетающая частица от геометрического центра мишени в отсутствие рассеяния:

$$\rho = R\sin\alpha = R\sin\frac{\pi - \theta}{2} = R\cos\frac{\theta}{2},$$

то есть

$$\rho = R\cos\frac{\theta}{2}.$$

Это соотношение, связывающее θ, R и ρ для абсолютно твердого шара называется <u>законом зеркального отражения</u>. Легко найти число частиц имеющих прицельные параметры от ρ до $\rho + d\rho$:

$$dN = j2\pi\rho\, d\rho.$$

Иными словами это число частиц, проходящих через кольцо радиусом ρ и толщиной $d\rho$. Тогда для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \frac{dN}{j} = 2\pi\rho\, d\rho.$$

Выразим $d\sigma$ через угол рассеяния:

$$d\sigma = 2\pi R^2 \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2\pi\frac{R^2}{4}\sin\theta d\theta.$$

Так как в рассматриваемом случае элемент телесного угла может быть представлен в виде $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$, для дифференциального сечения рассеяния найдем:

$$d\sigma = \frac{R^2}{4}d\Omega.$$

Полученное соотношение называется изотропным законом рассеяния.

Можно получить полное сечение рассеяния, проинтегрировав последнее соотношение. Учитывая, что $\int d\Omega = 4\pi$:

$$\sigma = \pi R^2,$$

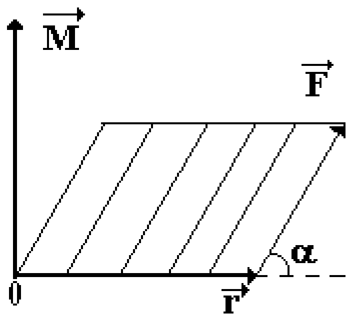
то есть полное сечение рассеяния определяется площадью поперечного сечения шара.

Измерение сечений рассеяния позволяет определить силы, действующие между взаимодействующими телами.

V. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердым телом в механике называют неизменяемую систему материальных точек, то есть систему, при любых движениях которой взаимные расстояния между частями системы остаются неизменными. Таким образом, твердое тело является абсолютно твердым, то есть недеформируемым. Очевидно, что такой подход является идеализацией. Допустима или нет такая идеализация, определяется как свойствами реальных тел, так и содержанием рассматриваемых вопросов. Во всяком случае, будем предполагать, что возникающие деформации не меняют характера изучаемых явлений.

Законы движения твердого тела связаны с понятиями момента силы и момента импульса.



Моментом силы $\vec{F}$, относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы относительно точки O на силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]. \tag{5.1}$$

Точка, относительно которой рассматривается момент, называется полюсом.

Из определения момента, на основании свойства векторного произведения, для суммы сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ можно написать

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right] = \left[\vec{r}\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}\vec{F}_2\right].$$

Момент равнодействующей сил, действующих на тело, относительно полюса O, равен сумме моментов действующих сил, относительно того же полюса.

Точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия, момент $\vec{M}$ при этом меняться не будет.

Плечом силы d называется кратчайшее расстояние от полюса до линии действия силы $d = r\sin\alpha$.

Моментом импульса частицы А относительно точки O называют векторное произведение радиус-вектора частицы А относительно точки O на импульс частицы

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \tag{5.2}$$

Найдем связь между введенными величинами. Продифференцировав (5.2) по времени, получим:

$$\dot{\vec{L}} = [\dot{\vec{r}}\,\vec{p}] + [\vec{r}\,\dot{\vec{p}}]. \tag{5.3}$$

Так как $\vec{L}$ рассматривается относительно неподвижного начала $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$ и с учетом того, что $\vec{p} = m\vec{V}$, первое слагаемое в (5.3) обращается в нуль, второе преобразуем, вспомнив, что $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (второй закон Ньютона), тогда

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{r}\,\dot{\vec{p}}] = [\vec{r}\vec{F}],$$

или

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ . \tag{5.4}$$

Это уравнение называется <u>уравнением моментов</u>: скорость изменения момента импульса материальной точки относительно неподвижного начала равна моменту действующей на него силы относительно того же начала. Таким образом, скорость изменения момента импульса характеризует отклик тела на приложенный к нему момент сил.

Данное уравнение, как и второй закон Ньютона, справедливо и в релятивистской механике.

Обобщим полученное соотношение на случай произвольной системы материальных точек.

<u>Моментом импульса системы</u> материальных точек относительно некоторого начала называется векторная сумма моментов импульсов материальных точек, входящих в систему, относительно того же начала:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i\ .$$

Аналогично для моментов сил:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i\ .$$

Под $\vec{M}$ в этом соотношении следует понимать суммарный момент всех сил, как внутренних, так и внешних. Однако легко показать, используя третий закон Ньютона, что моменты внутренних сил попарно компенсируются. Таким образом, для системы материальных точек, вместо (5.4) будем иметь:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} , \tag{5.5}$$

то есть производная по времени момента импульса системы материальных точек относительно неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.

Из уравнения (5.5) видно, что если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = const$. Если момент внешних сил относительно неподвижного начала *O* равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени. Это утверждение называется <u>законом сохранения момента импульса</u>. В частности он имеет место для изолированной системы и для системы, в которой действуют только центральные силы, проходящие через неподвижный центр *O*.

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы, он является следствием изотропности пространства.

Векторное уравнение (5.5) эквивалентно трем скалярным:

$$\frac{dL_x}{dt} = M^x_{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M^y_{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M^z_{\text{внеш}}. \tag{5.6}$$

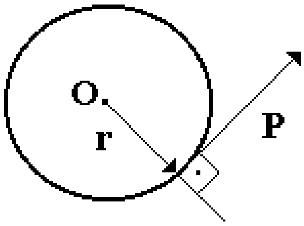
Входящие сюда величины L_i и M_i называются соответственно моментами импульса и сил относительно *i*-ой оси. Моментами импульса и силы относительно произвольной оси называют проекции векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ на эту ось, в предположении, что начало *O* лежит на этой оси.

Соотношение

$$\frac{dL_x}{dt} = M^x_{\text{внеш}} , \tag{5.6а}$$

называется <u>уравнением моментов, относительно неподвижной оси *X*</u>. Если момент сил относительно какой-либо оси равен нулю, то момент импульса системы, относительно той же оси, сохраняется. Это <u>закон сохранения момента импульса относительно оси</u>.

Рассмотрим вращательное движение вокруг неподвижной оси. За неподвижную ось моментов, выберем ось вращения. Пусть материальная точка вращается по окружности, тогда $\vec{L}=[\vec{r}\,\vec{p}]$, $\alpha=90°$ и, следовательно, модуль момента импульса запишется в виде $L=rmV$, выразим линейную скорость через угловую $V=\omega r$ и подставим в выражение для момента импульса:



$$L=m\omega r^2=mr^2\omega.$$

Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью, то суммарный момент импульса будет иметь вид:

$$L=\sum_i m_i r_i^2\omega=I\omega, \tag{5.7}$$

где

$$I=\sum_i m_i r_i^2. \tag{5.8}$$

Величина, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения, называется моментом инерции системы относительно этой оси.

Соотношение (5.7) показывает, что при вращении системы, момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.

В случае сплошного тела, сумму в (5.8) следует заменить интегралом по всему объему тела:

$$I=\int_{(V)} r^2 dm.$$

Подставляя (5.7) в (5.6а) получим основное уравнение вращательного движения вокруг неподвижной оси:

$$\frac{d(I\omega)}{dt}=M, \tag{5.9}$$

здесь M – момент внешних сил относительно оси вращения.

Если рассматривается вращение твердого тела или системы материальных точек с неизменной конфигурацией вокруг неподвижной оси, момент инерции I остается неизменным и уравнение (5.9) принимает вид:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M. \tag{5.9a}$$

Учитывая, что $\frac{d\omega}{dt} = \beta$ – угловое ускорение, запишем:

$$I\beta = M.$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно той же оси.

В таком виде уравнение вращательного движения твердого тела полностью аналогично уравнению поступательного движения материальной точки. Эту аналогию можно проследить и дальше. При вращении материальной точки по окружности, элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$, такое же выражение получится и для твердого тела, так как его можно рассматривать как систему материальных точек с неизменной конфигурацией. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела может быть представлена в виде:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega r_i)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{5.10}$$

или

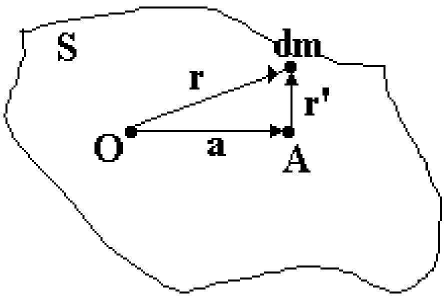
$$K = \frac{L^2}{2I}. \tag{5.10a}$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для материальной точки и могут быть получены из них формальной заменой: $r \to \varphi$, $F \to M$, $m \to I$, $V \to \omega$, $p \to L$.

§18. Теорема Гюйгенса-Штейнера

Найдем связь между моментами инерции относительно двух различных параллельных осей. Она устанавливается <u>теоремой Гюйгенса-Штей-</u>

нера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси проходящей через центр масс, параллельно данной и произведения массы на квадрат расстояния между осями.



Докажем эту теорему. Пусть S сечение тела плоскостью, перпендикулярной осям вращения. Будем предполагать, что центр масс находится в точке O и оси, проходящие через точки O и A, перпендикулярны к рисунку. Мысленно разобьем тело на элементарные массы dm. Момент инерции тела найдем, проинтегрировав по всему объему тела. Радиус-вектор элементарной массы dm относительно оси A $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}$, где $\vec{r}$ – ее радиус-вектор относительно оси O, $\vec{a}$ – радиус-вектор $\overline{OA}$, его модуль равен расстоянию между осями. Таким образом,

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\vec{a}\vec{r}). \tag{5.11}$$

Умножая обе части равенства (5.11) на dm и интегрируя по всему объему тела, получим:

$$\int\limits_{(V)} r'^2 dm = \int\limits_{(V)} r^2 dm + a^2 \int\limits_{(V)} dm - 2(\vec{a} \int\limits_{(V)} \vec{r} dm). \tag{5.12}$$

Так как ось O проходит через центр масс, последний интеграл в (5.12) обращается в нуль.

$$\vec{R}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r} dm = 0.$$

Интеграл в левой части равенства (5.12) дает момент инерции относительно оси A, первый интеграл справа – момент инерции относительно оси O, второй интеграл справа дает полную массу тела. Откуда

$$I_A = I_0 + ma^2. \tag{5.13}$$

Это и есть аналитическое выражение теоремы Гюйгенса-Штейнера.

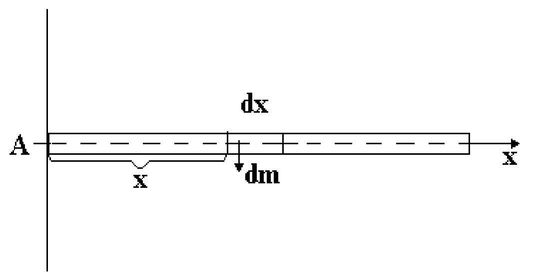
§19. Примеры вычисления моментов инерции

1. Рассчитать момент инерции тонкого однородного стержня, расположенного перпендикулярно оси вращения, проходящей через один из его концов. Длина стержня – l, масса – m.

Направим ось X вдоль стержня. Стержень будем считать тонким. Выделим элементарную массу dm, имеющую длину dx и расположенную на расстоянии x от оси вращения. Причем, поскольку стержень однородный $dm = \frac{m}{l}dx$. Масса, приходящаяся на единицу длины однородного тела, называется линейной плотностью ρ_l.

Тогда

$$dI_A = x^2 dm = x^2 \rho_l dx = \frac{m}{l} x^2 dx.$$



Проинтегрировав по всей длине стержня, получим:

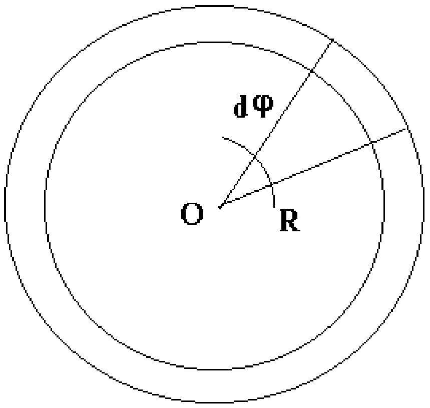
$$I_A = \frac{m}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (5.14)$$

Воспользовавшись теоремой Гюйгенса-Штейнера, найдем момент инерции стержня относительно оси проходящей через его центр масс, который расположен от оси A на расстоянии $a = \frac{l}{2}$:

$$I_O = I_A - m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}ml^2. \qquad (5.14a)$$

2. Тонкое однородное кольцо. Рассчитаем момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс (геометрический центр) перпендикулярно плоскости кольца.

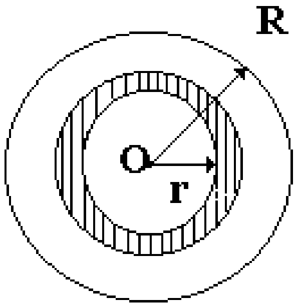
Выделим элементарную дугу, массой dm и длиной $ds = Rd\varphi$, тогда $dm = \frac{m}{2\pi R}Rd\varphi$, здесь $\frac{m}{2\pi R}$ – линейная плотность массы, то есть масса, приходящаяся на единицу длины. Поскольку все элементарные массы



расположены на одинаковом расстоянии от оси вращения (кольцо тонкое) $dI_O = R^2 \dfrac{m}{2\pi} d\varphi$.

Проинтегрировав по всей длине кольца (по φ от 0 до 2π) найдем:

$$I_O = \frac{m}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = mR^2. \qquad (5.15)$$



3. Тонкий однородный диск. Найдем его момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска. Радиус диска – *R*, масса – *m*. Используя симметрию задачи, разобьем диск на элементарные массы в виде тонких колец радиусом r и толщиной dr. Масса кольца – $dm = \dfrac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$, здесь $\dfrac{m}{\pi R^2}$ – поверхностная плотность диска (масса, приходящаяся на единицу площади поверхности), $2\pi r dr$ – площадь кольца. Используя результат предыдущего примера, напишем:

$$dI_O = r^2 dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r^3 dr.$$

Интегрируя это выражение по *r* в пределах от 0 до *R*, получим:

$$I_O = \frac{m}{R^2} 2\int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}. \qquad (5.16)$$

Сравнивая выражения (5.15) и (5.16) видим, что при одинаковых массах кольца и диска одинаковых радиусов, момент инерции кольца вдвое превышает момент инерции диска. Этот факт имеет простое объяснение. В случае кольца масса расположена на большем расстоянии от оси.

Приведем без доказательства еще одну полезную формулу. В случае плоского распределения масс

$$I_z = I_x + I_y,$$

где I_z – момент инерции относительно оси перпендикулярной к плоскости тела, I_x и I_y – моменты инерции относительно взаимно перпендикулярных осей лежащих в этой плоскости.

§20. Тензор инерции

Выясним, как связаны векторы момента импульса $\vec{L}$ и угловой скорости $\vec{\Omega}$ тела в общем случае. Угловая скорость $\vec{\Omega}$ может быть ориентирована произвольным образом относительно координатных осей. Разобьем тело на элементарные массы и, просуммировав их моменты импульса, получим момент импульса тела:

$$\vec{L} = \sum_k [\vec{r}_k\,\vec{p}_k] = \sum_k m_k \left[\vec{r}_k \left[\vec{\Omega}\vec{r}_k\right]\right] = \sum_k m_k \left\{\vec{\Omega} r_k^2 - \vec{r}_k(\vec{r}_k\vec{\Omega})\right\}. \qquad (5.17)$$

Здесь мы учли, что для всех элементарных масс угловая скорость $\vec{\Omega}$ одинакова, что $\vec{V}_k = \left[\vec{\Omega}\vec{r}_k\right]$, а также раскрыли двойное векторное произведение по правилу:

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Векторное уравнение (5.17) эквивалентно трем скалярным, которые представляют его проекции на выбранные оси.

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_k m_k \left\{\Omega_x r_k^2 - x_k^2\Omega_x - x_k y_k \Omega_y - x_k z_k \Omega_z\right\} = \\ &= \Omega_x \sum_k m_k (r_k^2 - x_k^2) - \Omega_y \sum_k m_k x_k y_k - \Omega_z \sum_k m_k x_k z_k, \\ L_y &= \sum_k m_k \left\{\Omega_y r_k^2 - y_k x_k \Omega_x - y_k^2 \Omega_y - y_k z_k \Omega_z\right\} = \\ &= \Omega_y \sum_k m_k (r_k^2 - y_k^2) - \Omega_x \sum_k m_k x_k y_k - \Omega_z \sum_k m_k y_k z_k. \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Аналогично для L_z. Эти уравнения можно представить в более компактной форме, введя обозначения:

$$I_{xx}=\sum_k m_k(r_k^2-x_k^2),\; I_{xy}=-\sum_k m_k x_k y_k,\; I_{xz}=-\sum_k m_k x_k z_k,$$
$$I_{yx}=-\sum_k m_k y_k x_k,\; \ldots$$

Из определения видна симметрия: $I_{xy}=I_{yx}$, $I_{xz}=I_{zx}$ и так далее. Тогда уравнения (5.18) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z \\ L_y &= I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z \,. \\ L_z &= I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z \end{aligned} \tag{5.19}$$

Из (5.19) видно, что в общем случае направления $\vec{L}$ и $\vec{\Omega}$ не совпадают, как это было в случае вращения вокруг закрепленной оси.

Совокупность девяти величин $I_{xx}, I_{xy}, \ldots, I_{zz}$ называют <u>тензором второго ранга</u>, а операцию, выражаемую формулами (5.19) называют умножением вектора $\vec{\Omega}$ на тензор $\hat{I}$.

Тензор принято записывать в виде квадратной таблички:

$$\hat{I}=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Этот тензор характеризует инертные свойства тела при вращении.

Диагональные компоненты тензора инерции $\hat{I}$ называются осевыми, а недиагональные – центробежными моментами инерции. В силу симметрии различными будут только 6 компонент. Такой тензор называется симметричным тензором 2 ранга и может быть приведен к диагональному виду. Тензор $\hat{I}$, приведенный к диагональному, виду называется тензором, приведенным к главным осям.

$$\hat{I}=\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Главные оси взаимно перпендикулярны и пересекаются в центре инерции тела. Таким образом, компоненты тензора инерции зависят от выбора системы координат.

Уравнения (5.19) в главных осях приводятся к виду:

$$L_x = I_x\Omega_x, \quad L_y = I_y\Omega_y, \quad L_z = I_z\Omega_z.$$

Если угловая скорость $\vec{\Omega}$ направлена вдоль одной из главных осей (например, оси *OX*), то $\vec{\Omega} = (\Omega_x, 0, 0)$,
тогда

$$L_x = I_x\Omega_x, \quad L_y = 0, \quad L_z = 0,$$

то есть $\vec{L} = I\vec{\Omega}$, направления $\vec{L}$ и $\vec{\Omega}$ совпадают, как в случае закрепленной оси. Величины I_x, I_y, I_z – называются главными моментами инерции.

Если $I_x \neq I_y \neq I_z$, то вращение вокруг различных осей будет обладать различной устойчивостью. Не вдаваясь в детали, скажем, что устойчивым является вращение вокруг осей с максимальным и минимальным моментами инерции, вращение вокруг оси с промежуточным моментом инерции является неустойчивым.

Легко написать выражение для кинетической энергии в случае вращения относительно произвольной оси

$$K = \frac{1}{2}(I_x\Omega_x^2 + I_y\Omega_y^2 + I_z\Omega_z^2) = \sum_{i=1}^{3} I_i\Omega_i^2. \tag{5.20}$$

§21. Гироскоп

Гироскопом называется быстро вращающееся твердое тело, ось которого может изменять свое направление в пространстве.

Явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются гироскопическими.

Наиболее широкое применение в науке и технике имеют симметричные гироскопы – это гироскопы, обладающие симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой геометрической осью, или осью фигуры гироскопа.

Одна из точек оси фигуры гироскопа бывает закреплена, ее называют точкой опоры гироскопа. В общем случае точкой опоры гироскопа называют такую точку O оси фигуры гироскопа, относительно которой рассматривают вращение гироскопа.

Примером гироскопа с движущейся точкой опоры может служить детский волчок.

Чтобы ось фигуры гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп обычно помещают в кардановом подвесе. Это устройство, которое позволяет свободно изменять ориентацию оси фигуры гироскопа в пространстве. Маховик гироскопа закрепляется на оси его фигуры, которая опирается на подшипники.

Если центр карданова подвеса (точка опоры) совпадает с центром масс гироскопа, гироскоп называется уравновешенным.

Вся теория гироскопов построена на уравнении моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \tag{5.21}$$

Причем моменты берутся относительно неподвижной точки опоры гироскопа. Если момент сил, действующих на гироскоп, равен нулю $\vec{M} = 0$, то момент импульса гироскопа сохраняется $\vec{L} = const$.

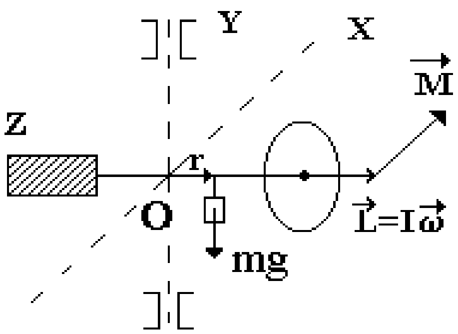
Если вращение происходит вокруг оси фигуры гироскопа, то угловая скорость $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ направлены вдоль оси.

Гироскоп с достаточно большим моментом инерции, приведенный в быстрое вращение, будет обладать большим моментом импульса. Приращение момента импульса, как это следует из уравнения моментов (5.21), определяется интегралом:

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M} dt . \tag{5.22}$$

Если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени, то приращение момента импульса будет малым, то есть если действие даже очень больших сил будет кратковременным, то движение гироскопа изменится мало, следовательно, гироскоп обладает устойчивостью движения после приведения его в быстрое вращение.

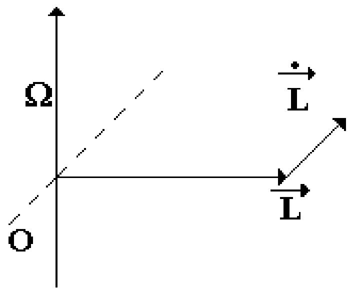
Наиболее интересным видом движения гироскопа является вынужденная прецессия. Это медленное вращение оси фигуры гироскопа вокруг направления вертикальной оси под действием внешней силы.



Поскольку момент внешней силы $\vec{F}$, (в данном случае это нескомпенсированная сила тяжести) перпендикулярен $\vec{L}$, то и производная момента импульса будет перпендикулярна моменту импульса $\dot{\vec{L}} \perp \vec{L}$, тогда меняется только направление момента импульса $\vec{L}$, но не меняется его величина. То есть если внешняя сила постоянна, то вектор $\vec{L}$, а с ним и ось гироскопа будет совершать равномерное вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Найдем длину вектора $\vec{\Omega}$. По аналогии с линейной скоростью вращательного движения $\vec{V} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$, можно написать:

$$\dot{\vec{L}} = \left[\vec{\Omega}\vec{L}\right] = \vec{M}. \tag{5.23}$$

Из этого уравнения легко найти Ω – скорость вынужденной прецессии; если учесть, что в нашем примере все три вектора взаимноперпендикулярны:



$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I_{\parallel}\,\omega}. \tag{5.24}$$

Приведенное рассмотрение справедливо, если $\Omega \ll \omega$, то есть для <u>быстрого гироскопа</u>. Вращение гироскопа считается быстрым, если угловая скорость вращения вокруг его оси фигуры ω велика по сравнению с угловой скоростью вращения вокруг перпендикулярной оси Ω.

§22. Плоское движение твердого тела

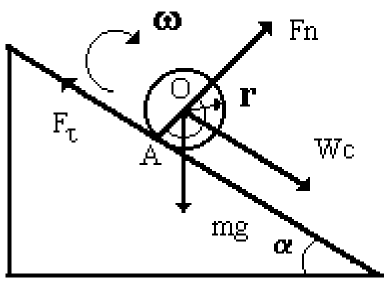
Плоским движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Без ограничения общности можно считать само тело плоским, а движение, происходящим в плоскости тела. Произвольное плоское движение можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, движущейся как в теле, так и в пространстве.

Прямая, проходящая через точки тела, скорости которых в данный момент равны нулю, называется мгновенной осью вращения.

Другой способ описания плоского движения состоит в следующем: описывается вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс тела и поступательное движение центра масс.

Покажем оба способа на примере скатывания симметричного тела (диска) с наклонной плоскости.

Диск массы m и радиуса r скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найти ускорение его центра масс w.



1 способ

Используем уравнение моментов относительно мгновенной оси, проходящей через точку A.

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A .$$

Воспользуемся теоремой Гюйгенса-Штейнера для определения момента инерции диска относительно оси, проходящей через точку A и учтем, что относительно точки A отличен от нуля только момент силы тяжести:

$$I_A = I_O + mr^2; \quad M_A = mgr\sin\alpha.$$

В общем случае линейная скорость точки O складывается из скорости движения точки A и скорости, обусловленной вращением относительно оси, проходящей через точку A: $V_O = V_A + \omega r$, если нет скольжения, то $V_A = 0$. Тогда

$$V_O = \omega r; \quad w = \frac{dV_O}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}; \quad w = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{I_O + mr^2} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{I_O}{mr^2}}.$$

2 способ

Уравнение моментов, относительно оси, проходящей через центр масс и уравнение движения центра масс, имеют вид:

$$\begin{cases} I_O \dfrac{d\omega}{dt} = M_C = rF_\tau \\ m\dfrac{dV_O}{dt} = mg\sin\alpha - F_\tau \end{cases}.$$

Здесь F_τ сила трения между диском и наклонной плоскостью.

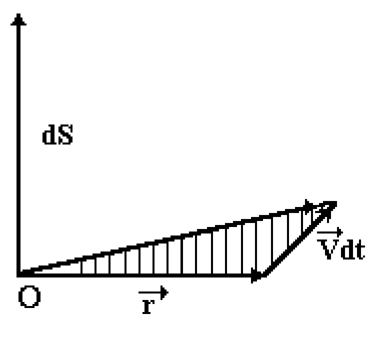
Решая эту систему уравнений, получим:

$$w = \frac{d\omega}{dt} r = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{I_O}{mr^2}},$$

$$F_\tau = \frac{I_O}{I_O + mr^2} mg\sin\alpha.$$

Этот способ позволяет найти силу трения. Как и должно быть, оба способа дают одинаковый результат для искомого ускорения.

§23. Секториальная скорость. Теорема площадей



Пусть имеется материальная точка, которая движется со скоростью $\vec{V}$, в момент времени t ее положение характеризовалось радиус-вектором $\vec{r}$, в момент $t + dt \Rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$, где $d\vec{r} = \vec{V}dt$. При этом радиус-вектор описал треугольник. Его площадь можно найти исходя из смысла векторного произведения:

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\vec{V}\right]dt. \quad (5.25)$$

Найдем скорость изменения площади, описываемой (заметаемой) радиус-вектором:

$$\dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\vec{V}\right] = \vec{\sigma}. \qquad (5.26)$$

Она определяет площадь, описываемую радиус-вектором в единицу времени и называется секториальной скоростью. По определению $\vec{L} = m\left[\vec{r}\vec{V}\right]$, тогда

$$\vec{L} = 2m\dot{\vec{S}} = 2m\vec{\sigma}, \qquad (5.27),$$

то есть в нерелятивистском случае, когда масса не зависит от скорости $m = const$, момент импульса пропорционален секториальной скорости. Если сила, действующая на материальную точку, является центральной, то вектор $\vec{L}$ не меняется со временем, в нерелятивистском случае не будет меняться и секториальная скорость.

$$\vec{\sigma} = const.$$

Из определения секториальной скорости следует, что плоскость, содержащая $\vec{r}$ и $\vec{V}$ перпендикулярна к $\vec{\sigma}$, но направление секториальной скорости $\vec{\sigma}$ фиксировано, значит, траектория – плоская кривая. Из постоянства секториальной скорости следует, что за равные промежутки времени радиус-вектор описывает (заметает) равные площади. Это утверждение называется теоремой площадей.

Теорема площадей справедлива для центральных сил. Верно и обратное утверждение.

VI. ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§24. Закон всемирного тяготения. I и II законы Кеплера

Кеплер обработал результаты наблюдений датского астронома Тихо Браге и пришел к выводу, что для движения планет справедливы три закона.

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади.
3. Квадраты времен обращения планет, относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Анализируя эти законы, Ньютон пришел к открытию закона всемирного тяготения. При этом Солнце и планета во взаимодействии выступают как равноправные тела и отличаются только количественно – величинами масс. Согласно закону всемирного тяготения: две материальные точки притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Эти силы называются гравитационными, или силами всемирного тяготения:

$$F = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \tag{6.1}$$

где γ – одно и то же для всех тел. Это универсальная постоянная, одна из важнейших мировых постоянных, называемая гравитационной постоянной:

$$\gamma = (6{,}6732 \pm 0{,}0030)\ 10^{-11} \text{Н м}^2 \text{кг}^{-2}.$$

В таком виде закон справедлив и для однородных тел сферической формы, при этом под расстоянием следует понимать расстояние между их геометрическими центрами.

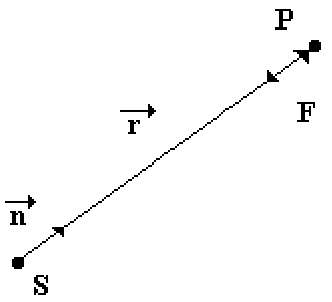
Поле тяготения является потенциальным полем, его потенциал, как показано выше, легко найти из условия

$$\vec{F} = -gradU; \Delta U = \gamma \int \frac{m_1 m_2}{r^2} dr,$$

откуда

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}. \qquad (6.2)$$

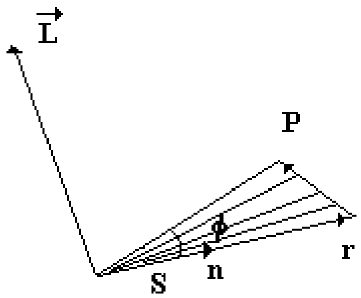
Перейдем к рассмотрению законов Кеплера. Пусть положение планеты относительно Солнца, характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$. Тогда, учитывая, что сила тяготения является центральной, можно записать:



$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{n}. \qquad (6.3)$$

Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор радиус-вектора. Запишем уравнение движения планеты в поле тяготения Солнца:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{n}. \qquad (6.4)$$



Рассмотрим закон сохранения момента импульса. Момент импульса планеты относительно Солнца, запишется в виде:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \qquad (6.5)$$

Из уравнения моментов следует, что $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$, так как сила центральна. В предыдущем разделе было показано, что в этом случае

$$|\vec{L}| = 2m\sigma.$$

Из сохранения $\vec{L}$ следует, что орбита есть плоская кривая (через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость),

$$\sigma = \frac{|\vec{L}|}{2m} = const. \qquad (6.6)$$

Учитывая, что $L = I\omega = mr^2\omega = 2m\sigma$, получим

$$\sigma = \frac{1}{2}r^2\omega = const.$$

Откуда следует, что чем ближе планета к Солнцу, тем быстрее она движется по орбите. Мы доказали второй закон Кеплера. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает (заметает) равные площади.

Для доказательства первого закона введем вектор Кеплера, который сохраняется в поле центральных сил $\sim r^{-2}$:

$$\left[\vec{p}\vec{L}\right] - \gamma M m^2 \vec{n} = \vec{K} = const. \tag{6.7}$$

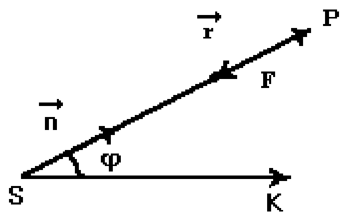
Проверим, что вектор Кеплера сохраняется, для этого достаточно показать, что $\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \left[\dot{\vec{p}}\vec{L}\right] - \gamma M m^2 \dot{\vec{n}} = \left[-\gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{n}, mr^2\vec{\omega}\right] - \gamma M m^2 \dot{\vec{n}} = \gamma M m^2 (\left[\vec{\omega}\vec{n}\right] - \dot{\vec{n}}) = 0,$$

так как $\dot{\vec{n}} = \left[\vec{\omega}\vec{n}\right]$. Найдем форму орбиты. Умножим вектор Кеплера $\vec{K}$ скалярно на $\vec{n}$:

$$\vec{K}\cdot\vec{n} = K\cos\varphi = -\gamma M m^2 + \vec{n}\left[\vec{p}\vec{L}\right] = -\gamma M m^2 + \vec{L}\left[\vec{n}\vec{p}\right] = -\gamma M m^2 + \frac{L^2}{r};\ \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Откуда:



$$K\cos\varphi = -\gamma M m^2 + \frac{L^2}{r}$$

или

$$r = \frac{L^2}{\gamma M m^2 + K\cos\varphi}. \tag{6.8}$$

Это уравнение можно представить в виде уравнения конического сечения с эксцентриситетом e и параметром ρ:

$$r = \frac{\rho}{1 - e\cos\varphi},$$

где

$$\rho = \frac{L^2}{\gamma M m^2},\ e = \frac{K}{\gamma M m^2}, \tag{6.9}$$

при $e=0$ получается окружность, $0<e<1$ – эллипс, $e>1$ – гипербола, $e=1$ – парабола.

Запишем связь эксцентриситета e и параметра ρ с полуосями эллипса.

$\rho=\frac{b^2}{a}$, где a и b – большая и малая полуоси эллипса соответственно.

$e=\frac{c}{a}$ – эксцентриситет, $2c$ – расстояние между фокусами эллипса. Мы доказали первый закон Кеплера. Из соотношения (6.8) следует, что орбиты небесных тел являются кривыми второго порядка. Вид кривой определяется параметрами тела.

§25. Третий закон Кеплера

Найдем период обращения планеты по орбите. Учитывая постоянство секториальной скорости, его можно найти как отношение площади орбиты к секториальной скорости:

$$T=\frac{S_{\text{эл}}}{\sigma}=\frac{\pi ab}{\sigma}=\frac{\pi a\sqrt{a\rho}}{\frac{L}{2m}}=\frac{\pi a^{3/2}2m}{L}\cdot\frac{L}{\sqrt{\gamma Mm^2}}=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}.$$

Беря отношение периодов для разных планет, получим:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{6.10}$$

Отсюда следует третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся.

Несколько слов о приближениях, в которых проведено рассмотрение:

1. Земля рассматривалась как материальная точка.
2. Не был учтен тот факт, что система отсчета, связанная с Солнцем, неинерциальна.
3. Не учитывалось взаимодействие рассматриваемой планеты с другими планетами.

VII. КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрение колебательного движения проведем на примере механических колебаний и начнем с простейшего из них – гармонического колебания.

Гармоническое колебание будем рассматривать как одномерное движение. Тогда из второго закона Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

получим

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x,$$

учитывая, что движение происходит только вдоль оси OX, для упрощения записи опустим индекс x у соответствующих величин

$$\frac{dp}{dt} = F, \tag{7.1}$$

где $F = -kx$ – квазиупругая сила. Это потенциальная сила с потенциалом $U = k\frac{x^2}{2} + const$ всегда можно выбрать $const = 0$. В общем случае потенциальную энергию можно разложить в ряд Тейлора:

$$U(x) = U(0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_0 x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_0 x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_0 x^3 + \dots,$$

$U(0) = 0$ – этого можно достичь соответствующим выбором начала отсчета энергии, $\frac{dU}{dx} = 0$, так как для существования колебательного движения необходимо существование положения равновесия, то есть в этом положении $U(x)$ имеет экстремум (в случае устойчивого положения равновесия это min). Слагаемым $\sim x^3$ можно пренебречь в случае малых отклонений от положения равновесия. Учет этого слагаемого приводит к ангармонизму, движение в этом случае носит более сложный характер.

Таким образом, для малых отклонений $U(x)=\frac{kx^2}{2}$, а сила квазиупруга $F=-kx$, тогда:

$$p=m\dot{x},\quad \dot{p}=F,\quad m\ddot{x}=-kx,\quad \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0. \tag{7.2}$$

Последнее уравнение (7.2) называется уравнением свободных гармонических колебаний. По классификации это линейное, однородное, дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение в общем виде можно записать:

$$x(t)=x_0\sin(\omega_0 t+\alpha)=A\cos(\omega_0 t+\beta). \tag{7.3}$$

Легко проверить, что это решение основного уравнения динамики свободных гармонических колебаний. Для этого нужно найти первую и вторую производные от выражения (7.3) и подставить их в последнее уравнение (7.2):

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=x_0\omega_0\cos(\omega_0 t+\alpha),\\
&\ddot{x}=-x_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha),\\
&-x_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha)=-\frac{k}{m}x_0\sin(\omega_0 t+\alpha).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства (7.4) найдем $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ или $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ – круговая (угловая) частота, по смыслу ее квадрат – это возвращающая сила на единицу смещения и на единицу массы. Видно, что частота колебаний не зависит от амплитуды. x_0 – амплитуда колебаний: максимальное отклонение от положения равновесия, $\nu=\frac{\omega_0}{2\pi}$ – частота.

$$T=\frac{1}{\nu}=\frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{7.5}$$

период свободных гармонических колебаний, $\omega_0 t+\alpha$ – фаза колебаний, α – начальная фаза колебаний.

Решение можно представить в иной форме, воспользовавшись формулой для синуса (косинуса) суммы:

$$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t. \tag{7.6}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 необходимо задать начальные условия $\dot{x}(0) = V_0$ и $x(0) = x_0$, тогда

$$C_1 = \frac{V_0}{\omega_0};\ C_2 = x_0.$$

Эти выражения получаются из соотношения (7.6) с учетом начальных условий.

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. Тело вывели из положения равновесия и отпустили без начальной скорости:

$x(0) = x_0;\quad \dot{x}(0) = 0;\quad C_1 = 0;\ C_2 = x_0;$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t;$$

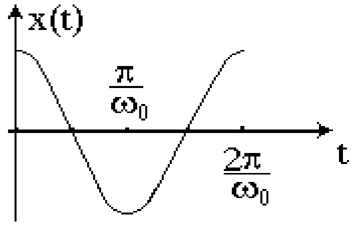
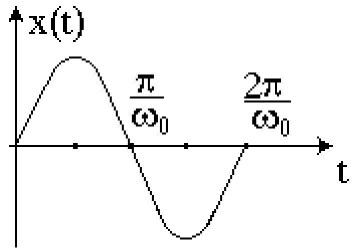


График зависимости координаты от времени представлен на рисунке.

2. Телу сообщили начальную скорость в положении равновесия:

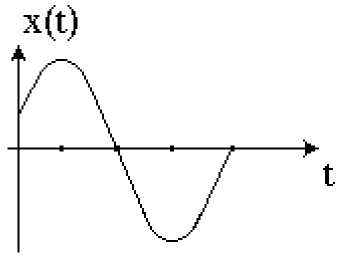
$$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = V_0;\ C_2 = 0;\ C_1 = \frac{V_0}{\omega_0};$$

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$



Случаи 1 и 2 соответствуют двум различным способам возбуждения колебаний.

В общем случае, когда тело отвели от положения равновесия и сообщили начальную скорость, будем иметь:



$$x(0) = x_0;\quad \dot{x}(0) = V_0,$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

§26. Механическая энергия тела при гармонических колебаниях

Рассмотрим изменения кинетической и потенциальной энергии тела в процессе гармонических колебаний.

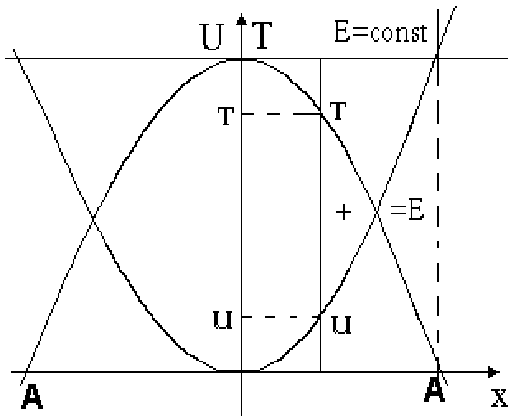
$$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const\,. \qquad (7.7)$$

Подставим в (7.7) выражения для координаты и скорости колеблющегося тела

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

получим:

$$E = \frac{mA^2}{2}\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha)\,. \qquad (7.8)$$



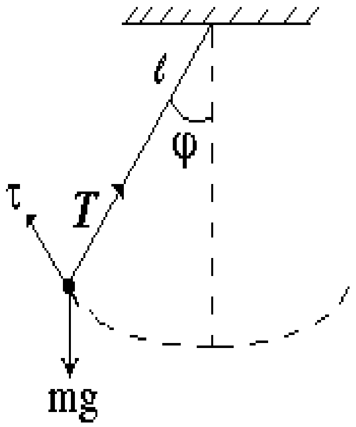
Амплитудные значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой, что следует из закона сохранения энергии:

$$\frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \text{ так как } \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \qquad (7.9)$$

Изобразим энергетическую диаграмму, дающую зависимость кинетической и потенциальной энергии колеблющегося тела от величины его смещения от положения равновесия. Из приведенной диаграммы видно, что в любой момент времени сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная.

Всякая система, совершающая колебательное движение, называется осциллятором.

§27. Математический маятник



Математический маятник состоит из материальной точки массой m, расположенной на нижнем конце невесомого нерастяжимого стержня (нити), длиной l, свободно вращающегося вокруг оси, проходящей через его верхний конец.

Задача состоит в том, чтобы найти уравнение движения маятника и частоту его собственных колебаний. Запишем основное уравнение динамики для материальной точки:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}\,. \tag{7.10}$$

Смещение маятника из положения равновесия есть $s = l\varphi$.

Спроектируем уравнение (7.10) на направление касательной к траектории материальной точки:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\varphi\,,$$

или, с учетом нерастяжимости стержня

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi\,, \tag{7.11}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\,. \tag{7.12}$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, однако, в случае малых углов отклонения его можно свести к линейному, если учесть, что при малых значениях угла φ: $\sin\varphi \approx \varphi$ ($\varphi \ll 1$, если φ измеряется в радианах).

Тогда

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0\,,$$

обозначив
$$\frac{g}{l} = \omega_0^2; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \tag{7.12a}$$

получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{7.13}$$

Это есть уравнение гармонического колебания, его решение имеет вид:

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

При начальных условиях:

$$\dot{\varphi}(0) = 0; \quad \varphi(0) = \varphi_m,$$

получим:

$$\varphi = \varphi_m \cos\omega_0 t. \tag{7.13а}$$

Период колебаний математического маятника:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

не зависит от амплитуды в случае малых отклонений, однако, в общем случае это не так.

Рассмотрим более строгую теорию математического маятника.

Период колебаний можно определить исходя из закона сохранения энергии. Сила тяжести потенциальна, сила натяжения в данном случае работы не совершает, так как перпендикулярна к скорости, таким образом, при движении математического маятника энергия сохраняется.

$$\begin{aligned} E &= \frac{mV^2}{2} + U = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2} + mgh = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi) = \\ &= \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + 2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2} = const. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Это уже уравнение первого порядка и хотя оно нелинейное, можно сразу записать его решение в интегральной форме. Таким образом, применение закона сохранения энергии понижает порядок уравнения. Значение постоянной величины определим из начальных условий: маятник отклонили от положения равновесия и отпустили без начальной скорости

$$\dot{\varphi}(0)=0; \quad \varphi(0)=\varphi_m,$$

тогда

$$const = mgl(1-\cos\varphi_m) = 2mgl\sin^2\frac{\varphi_m}{2}.$$

Подставляя это значение постоянной величины в выражение (7.14) найдем:

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{4g}{l}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{4g}{l}\sin^2\frac{\varphi_m}{2},$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\varphi_m}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

откуда, обозначив, как и раньше $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, получим

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_m}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_m}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\int\omega_0 dt,$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_m}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\omega_0 t + const. \qquad (7.15)$$

Показать самостоятельно, что при малых углах, то есть когда $\sin\varphi \approx \varphi$ из выражения (7.15) получится решение (7.13а) для малых колебаний математического маятника.

Учитывая, что из нулевого положения до положения максимального отклонения математический маятник движется четверть периода, напишем:

$$\int_0^{\varphi_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_m}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\omega_0\frac{T}{4}.$$

Поскольку $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$, получим связь между периодом колебаний маятника в случае произвольного отклонения от положения равновесия и периодом его малых колебаний:

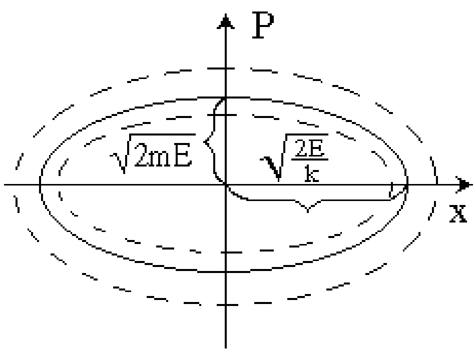
$$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\varphi_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_m}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \qquad (7.16)$$

Этот интеграл через элементарные функции не выражается. Его можно свести к интегралу вида $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$, который называется эллиптическим интегралом 1 рода. Его значения приведены в соответствующих таблицах. Но его можно представить в виде ряда, тогда:

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_m}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_m}{2} + \ldots\right).$$

Таким образом $T = f(\varphi_m)$, то есть в случае произвольных отклонений маятника от положения равновесия период начинает зависеть от амплитуды, а, следовательно, и частота колебаний также зависит от амплитуды колебаний $\omega = F(\varphi_m)$.

§28. Понятие о фазовом портрете



Фазовая плоскость – это плоскость изменения переменных: импульс p и координата x или скорость V и координата x. График зависимости импульса (скорости) от координаты называется фазовым портретом системы. Энергия в случае гармонического осциллятора сохраняется:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2},$$

или

$$\frac{p^2}{2mE}+\frac{kx^2}{2E}=1.$$

Это есть уравнение эллипса, с полуосями $a=\sqrt{\frac{2E}{k}}$, $b=\sqrt{2mE}$, таким образом, фазовым портретом гармонического осциллятора является эллипс. Полуоси эллипса определяются энергией и параметрами системы.

§29. Фазовый портрет математического маятника

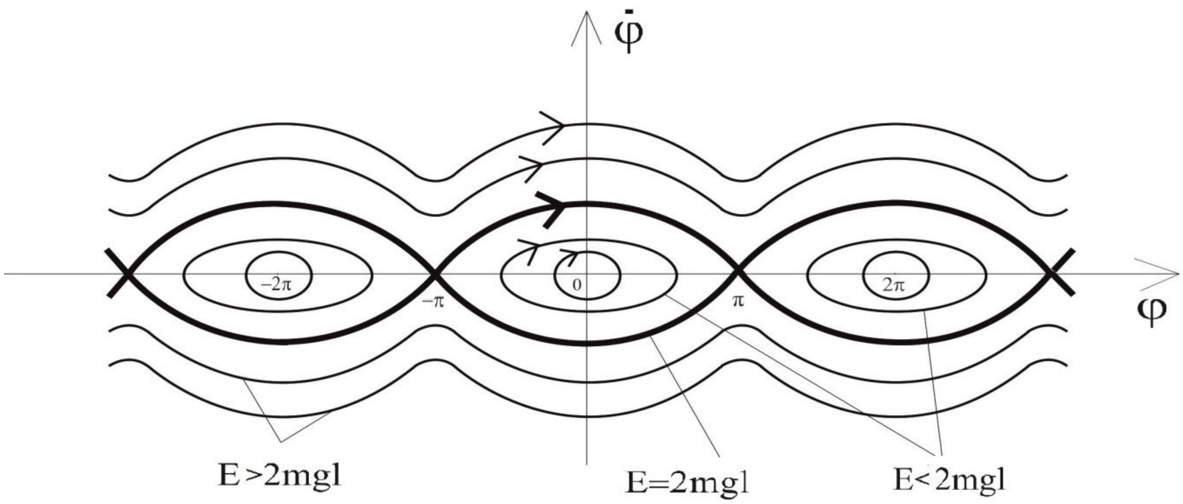
Энергия математического маятника, как показано выше, есть:

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}+mgl(1-\cos\varphi). \tag{7.17}$$

Характер движения будет зависеть от значения полной механической энергии маятника. Очевидно, что если энергия маятника меньше потенциальной энергии в наивысшей точке траектории $E<2mgl$, движение будет колебательным, при $E>2mgl$ – вращательным, то есть маятник будет вращаться вокруг точки подвеса.

Уравнение фазовых траекторий получим из выражения для полной энергии:

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2E}{ml^2}-4\omega_0^2\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{7.17a}$$



Видно, что для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$, фазовые кривые имеют вид эллипсов, как и для гармонического осциллятора. Таким образом, замкнутые кривые, вокруг точки (0,0) соответствуют значениям энергии, допускающим периодическое движение вокруг положения равновесия. Замкнутые кривые вокруг точек ($\pm 2\pi n$,0) физического смысла не имеют. Кривая на фазовой плоскости, отделяющая колебательное движение от вращательного, называется сепаратрисой. Ей соответствует энергия $E = 2mgl$. Легко получить уравнение сепаратрисы, подставив в (7.17) выражение для полной энергии $E = 2mgl$.

$$2mgl = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi),$$

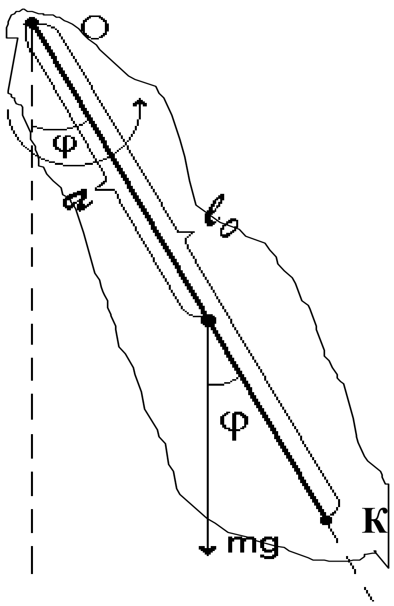
или

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (7.18)$$

Эта зависимость изображена на рисунке жирными линиями.

Как видно из выражения (7.17а) при $E > 2mgl$ график будет изображаться незамкнутыми кривыми, расположенными выше и ниже сепаратрис. Эти кривые характеризуют вращение маятника в заданном направлении.

§30. Физический маятник



Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать движение относительно закрепленной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс этого тела.

Точка пересечения оси с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется точкой подвеса O.

Пусть тело A свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. Расстояние от точки подвеса до центра масс равно a, отклонение тела от положения равновесия будем характеризовать углом φ. Движение тела A описывается уравнением моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,. \qquad (7.19)$$

Спроектируем (7.19) на ось перпендикулярную рисунку, проходящую через точку O. На рисунке указано положительное направление вращения. Под $\vec{M}$ понимается момент силы тяжести. Его проекция на выбранную ось:

$$M_z = -mga\sin\varphi, \qquad (7.20)$$

m – масса тела. Момент импульса маятника относительно оси вращения имеет вид:

$$L_z = I\omega.$$

Дифференцируя полученное соотношение по времени получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\ddot{\varphi}, \qquad (7.21)$$

где I – момент инерции тела.

Подставим выражения (7.20) и (7.21) в (7.19)

$$I\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\sin\varphi = 0.$$

Это нелинейное уравнение, его можно линеаризовать, учтя, что при малых углах $\sin\varphi \approx \varphi$ (как в случае математического маятника)

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I}\varphi = 0.$$

Полученное уравнение, является уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}\,. \qquad (7.22)$$

Сравнивая это с частотой гармонических колебаний математического маятника, видим, что математический маятник, имеющий длину: $l_0 = \dfrac{I}{ma}$ будет иметь такой же период (частоту) что и данный физический. l_0 – называется приведенной длиной физического маятника.

Итак, приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период (частота) которого совпадает с периодом (частотой) физического маятника.

Точка *K*, находящаяся на расстоянии l_0 от точки подвеса и лежащая на прямой, соединяющей точку подвеса и центр масс, называется центром качания физического маятника.

Центр качания обладает следующим свойством: если ось вращения поместить в центре качания, то частота колебаний маятника не изменится, а центр качаний переместится в бывшую точку подвеса.

Центр качания можно определить иначе: это точка, в которой необходимо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний не изменился.

§31. Затухающие колебания

Сила сопротивления среды в некотором приближении пропорциональна скорости. С учетом этого уравнение движения будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}, \tag{7.23}$$

здесь λ – коэффициент вязкости среды, определяющий силу вязкого трения, характеризует свойства системы. Перенесем все влево и разделим на m:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = 0;$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{m}. \tag{7.24}$$

Решение этого уравнения записывается в виде:

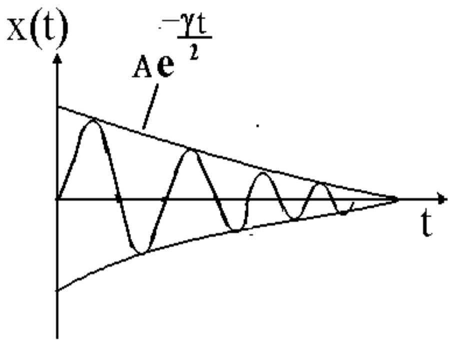
$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega_1 t + \alpha), \tag{7.25}$$

Из полученного соотношения видно, что амплитуда колебаний убывает с течением времени, такие колебания называются затухающими, а частота $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ – частотой затухающих колебаний.

В том, что выражение (7.25) есть решение уравнения (7.23) легко убедиться, дважды продифференцировав $x(t)$ и подставив $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и x в уравнение (7.23). (Проделать самостоятельно).

Сравнивая ω_1 с ω_0 видим, что $\omega_1 < \omega_0$, то есть при наличии трения, частота колебаний уменьшается.

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ – условный период затухающих колебаний.



$x(t)$ представляет собой произведение убывающей экспоненты на периодическую функцию. График $x(t)$ имеет вид представленный на рисунке.

Скорость затухания определяется коэффициентом $\gamma/2$, который называется <u>коэффициентом затухания</u>, он определяется отношением коэффициента силы трения к удвоенной массе.

Для оценки затухания системы в зависимости от числа колебаний пользуются декрементом затухания, который определяется как отношение амплитуд через период:

$$D = \frac{x(0)}{x(T)} = e^{\frac{\gamma T_1}{2}}. \qquad (7.26)$$

Если взять логарифм от выражения (7.26), то получим логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln D = \frac{\gamma T_1}{2} = \frac{\pi\gamma}{\omega_1}. \qquad (7.27)$$

Можно ввести время релаксации $\tau = \frac{2}{\gamma}$ – это время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Тогда

$$\delta = \frac{T_1}{\tau}.$$

Величина обратная логарифмическому декременту затухания показывает, сколько колебаний совершит система, прежде чем амплитуда уменьшится в e раз.

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\tau}{T_1} = N. \tag{7.28}$$

Для характеристики осциллирующей системы часто используется величина Q, называемая добротностью – это умноженное на 2π отношение запасенной энергии к среднему значению энергии, теряемому за один период $T_1 \cdot \langle P \rangle$, здесь $\langle P \rangle$ – средняя мощность, то есть чем больше Q, тем меньше затухание осциллятора.

$$Q = \frac{2\pi E}{T_1 \langle P \rangle} = \frac{2\pi E \nu_1}{\langle P \rangle} \approx \omega_0 \tau. \tag{7.29}$$

Последнее равенство справедливо в случае слабого затухания, когда частоты свободных и затухающих колебаний мало отличаются.

§32. Вынужденные колебания

Если к рассмотренным раннее силам, действующим на осциллятор, добавить внешнюю периодическую силу с частотой Ω и амплитудой F_0, то уравнение примет вид:

$$m\ddot{x} + kx + \lambda \dot{x} = F_0 \cos \Omega t. \tag{7.30}$$

Это уравнение линейное, дифференциальное, второго порядка, с постоянными коэффициентами, неоднородное.

Чтобы были возможны незатухающие колебания, необходимо, чтобы вынуждающая сила восполняла потери энергии на совершение работы против силы вязкого трения.

Решение уравнения (7.30) в общем случае имеет вид:

$$x(t) = x_{\text{о.о}}(t) + x_{\text{ч.н}}(t),$$

где $x_{\text{о.о}}(t)$ – общее решение однородного уравнения, оно определяется соотношением (7.25) и $x_{\text{ч.н}}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения. Учитывая затухающий характер решения (7.25), можно сказать, что через время $t > \tau$, общее решение однородного уравнения полностью затухнет и решение уравнения (7.30) будет определяться только частным решением неоднородного уравнения $x_{\text{ч.н}}(t)$, которое будем искать в виде:

$$x(t) = x_{\text{ч.н}}(t) = B\sin\Omega t + D\cos\Omega t. \qquad (7.31)$$

Подставим выражение (7.31) в уравнение (7.30), предварительно дважды продифференцировав его по времени:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B\Omega\cos\Omega t - D\Omega\sin\Omega t \\ \ddot{x}(t) &= -B\Omega^2\sin\Omega t - D\Omega^2\cos\Omega t \end{aligned}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &-m\Omega^2(B\sin\Omega t + D\cos\Omega t) + k(B\sin\Omega t + D\cos\Omega t) + \\ &+ \lambda\Omega(B\cos\Omega t - D\sin\Omega t) = F_0\cos\Omega t. \end{aligned}$$

Полученное равенство будет справедливым тогда и только тогда, когда будут равны коэффициенты перед функциями $\sin\Omega t$ и $\cos\Omega t$ в левой и правой частях равенства:

$$\begin{cases} -m\Omega^2 B + kB - \lambda\Omega D = 0 \\ -m\Omega^2 D + kD + \lambda\Omega B = F_0 \end{cases}.$$

Таким образом, получается система двух уравнений (алгебраических) с двумя неизвестными. Решая ее (любым известным методом) найдем:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{F_0}{m}\frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \\ D &= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2} \end{aligned}\right\}, \qquad (7.32)$$

здесь $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Коэффициенты B и D определяют отклик системы на внешнее возмущение:

B – называется амплитудой поглощения, или абсорбтивной амплитудой;

D – называется упругой или дисперсивной амплитудой.

Движение носит периодический характер, так как мощность, рассеиваемая силой трения в среднем компенсируется мощностью внешней силы. Покажем это. Мгновенная мощность, развиваемая внешней силой, есть $W(t) = F(t)\dot{x}(t) = F_0\cos\Omega t(B\Omega\cos\Omega t - D\Omega\sin\Omega t)$.

Усредним по периоду, воспользовавшись определением среднего значения функции, зависящей от времени:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T W(t)dt = \frac{F_0 B\Omega}{2}. \tag{7.33}$$

Мощность силы трения за период:

$$\langle W_{\text{тр}} \rangle = \langle F_{\text{тр}}\dot{x}(t) \rangle = -\lambda\langle \dot{x}(t)^2 \rangle = -\frac{\lambda\Omega^2}{2}(B^2 + D^2) = -\frac{1}{2}\Omega F_0 B. \tag{7.34}$$

Расчет предлагается провести самостоятельно.

Выражения (7.33) и (7.34) отличаются только знаком, что и подтверждает сделанное утверждение (при получении выражения (7.34) необходимо воспользоваться выражениями (7.32)).

Заметим, что частное решение неоднородного уравнения (7.30) можно записать в другом виде

$$x_{чн}(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \tag{7.31а}$$

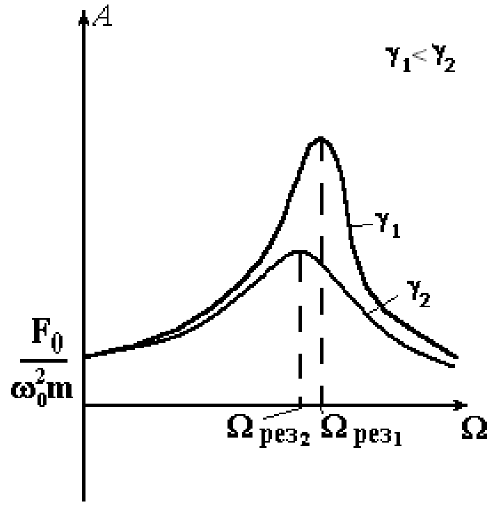
где амплитуда A и фаза колебаний φ определяются, как легко показать, следующими соотношениями:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}, \tag{7.32а}$$

$$tg\varphi = \frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{7.32б}$$

В каком виде выбрать решение уравнения (7.30) определяется соображениями удобства.

§33. Резонанс



Будем наблюдать за изменением амплитуды вынужденных колебаний при медленном изменении частоты внешней силы Ω. Для анализа воспользуемся выражением (7.31а). Видно, что в отсутствие трения ($\gamma = 0$) при $\Omega = \omega_0$ наблюдается неограниченный рост амплитуды вынужденных колебаний (7.32а). Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы, называется резонансом, а эта частота – резонансной.

При наличии трения резонансная амплитуда остается конечной, несмотря на резкое возрастание. Определим резонансную частоту. Для этого нужно найти минимум знаменателя в выражении (7.32а):

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2\right] = 0.$$

Продифференцировав и решив полученное уравнение найдем:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}\,. \qquad (7.35)$$

В случае малого затухания, то есть $\gamma \ll \omega_0$, вместо выражения (7.35), после разложения получим:

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right). \qquad (7.36)$$

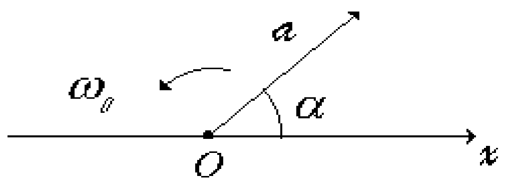
Из выражения (7.36) видно, что при наличии силы трения резонанс наступает при меньших частотах, чем в ее отсутствие. С ростом силы трения (коэффициента затухания) резонансная частота уменьшается, уменьшается также и резонансная амплитуда, пик становится более размытым (см. рис).

§34. Сложение колебаний

Решение вопроса о сложении нескольких колебаний одинакового направления становится более наглядным, если изобразить колебания в виде векторной диаграммы.

Пусть колебание описывается уравнением:

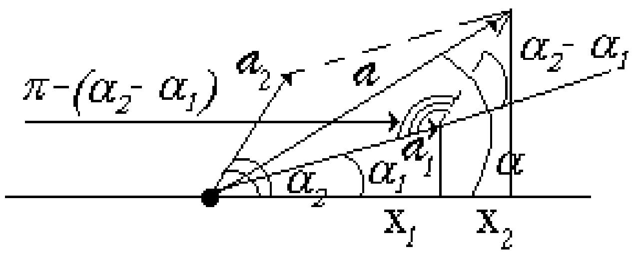
$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (7.37)$$



Возьмем ось X и из некоторой точки O отложим под углом α к ней вектор $\vec{a}$. Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, проходящей через точку O, перпендикулярно плоскости рисунка, то координата конца вектора будет меняться со временем в соответствии с уравнением (7.37). Изображенная схема и называется векторной диаграммой.

Рассмотрим сложение двух колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$x_1(t) = a_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1), \qquad x_2(t) = a_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$



Представим оба колебания с помощью векторных диаграмм. Вектор $\vec{a}$, равный векторной сумме $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ при вращении представляет, как показано на рисунке, результирующее колебание $x = x_1 + x_2$. Амплитуду a и начальную фазу α результирующего колебания найдем из рисунка

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (7.38)$$

и

$$tg\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}.$$

Из (7.38) видно, что если разность фаз равна нулю, то амплитуда результирующего колебания $a = a_1 + a_2$, то есть равна просто сумме амплитуд складываемых колебаний. В случае $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$, то есть колебания находятся в противофазе, амплитуда колебания есть $a = |a_1 - a_2|$.

Если частоты складываемых колебаний неодинаковы $\omega_1 \neq \omega_2$, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ будут вращаться с разными скоростями, тогда вектор $\vec{a}$ будет вращаться с непостоянной скоростью и кроме того будет менять свою длину, откуда следует, что результирующее колебание уже не будет гармоническим.

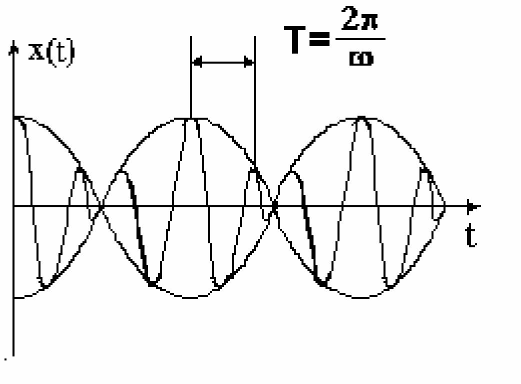
§35. Биения

Рассмотрим случай, когда складываемые колебания мало отличаются по частоте:

$$x_1 = a\cos\omega t, \qquad x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Для упрощения выкладок, мы считаем амплитуды колебаний одинаковыми, а начальные фазы полагаем равными нулю. Тогда, используя формулу для суммы косинусов, получим:

$$x = x_1 + x_2 = (2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t.$$



Учитывая, что $\Delta\omega \ll \omega$, положим $\omega + \dfrac{\Delta\omega}{2} \approx \omega$, откуда

$$x = (2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos\omega t. \qquad (7.39)$$

Первый сомножитель в выражении (7.39) изменяется гораздо медленнее, чем второй. Это позволяет рассматривать колебание (7.39) как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой, меняющейся по гармоническому закону. Такие колебания называются биениями. Результат сложения рассматриваемых колебаний схематически представлен на рисунке.

§36. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Выберем начальную фазу одного колебания, скажем направленного вдоль оси X, равной нулю. Сначала рассмотрим случай одинаковых частот:

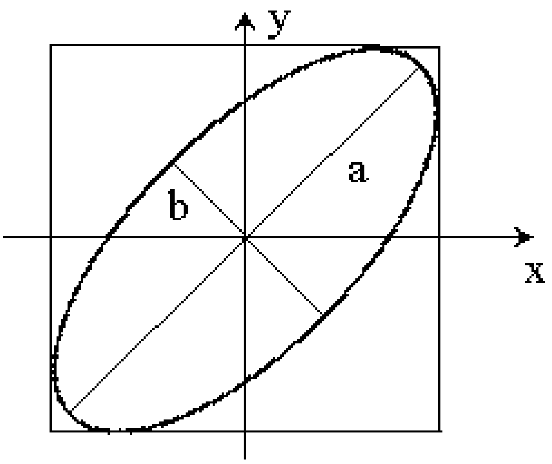
$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\cos(\omega t + \alpha). \tag{7.40}$$

Уравнения (7.40) представляют собой уравнение траектории колеблющейся точки в параметрическом виде. Исключая время получим его в явном виде.

Из первого уравнения: $\frac{x}{a} = \cos\omega t$; из второго: $\frac{y}{b} = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha$

или

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\alpha.$$



Избавившись от радикала и преобразовав это соотношение, найдем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha. \tag{7.41}$$

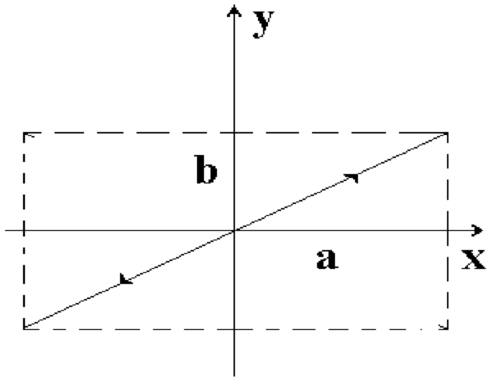
Это уравнение эллипса, оси которого ориентированы произвольно относительно координатных осей x и y. Таким образом, при сложении взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами, траекторией частицы, в общем случае, является эллипс.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть фазы колебаний совпадают $\alpha = 0$.

Поставив $\alpha = 0$ в уравнение (7.41) найдем:

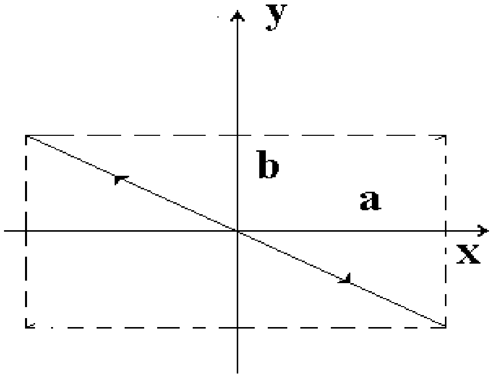
$$y = \frac{b}{a}x. \tag{7.41a}$$



Это уравнение прямой, которая является диагональю прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Результат сложения взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами и совпадающими фазами, представлен на рисунке.

2. Если колебания находятся в противофазе $\alpha = \pi$, из уравнения (7.41) получим

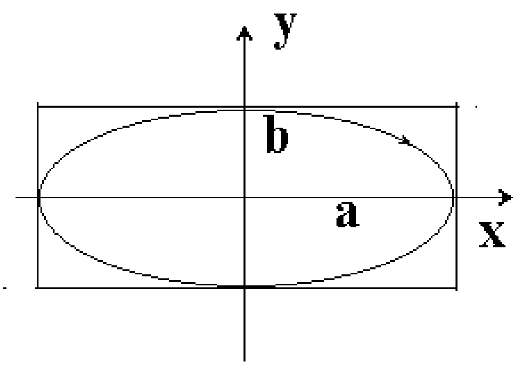
$$y = -\frac{b}{a}x. \qquad (7.41б)$$



Это вторая диагональ того же прямоугольника.

Таким образом, если складываемые колебания находятся в фазе $\alpha = 0$ или в противофазе $\alpha = \pi$, траектория колеблющейся точки является прямой линией.

3. Рассмотрим случай $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, складываемые колебания запишутся в виде: $x = a\cos\omega t,\ y = -b\sin\omega t$.



Исключая из этих соотношений время, получим

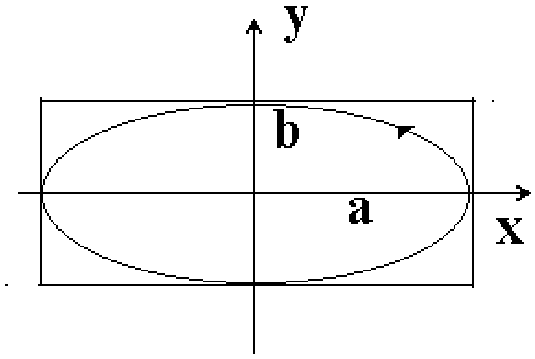
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.41в)$$

Это эллипс, вписанный в тот же прямоугольник. Направление движения колеблющейся частицы по эллипсу указано стрелкой.

4. Если $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$, то $x = a\cos\omega t,\ y = b\sin\omega t$.

Вновь получаем эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7.41г)$$

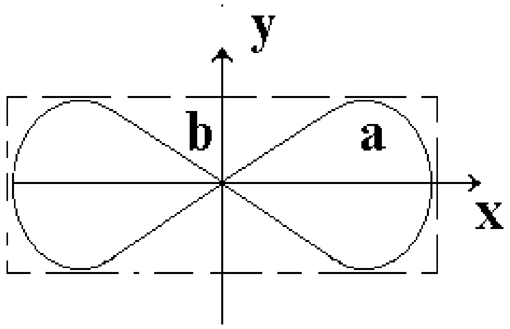


но частица движется по нему в противоположную сторону.

Эллипс в случае 3) называется левым, а в случае 4) – правым.

Уравнения (7.41а, б, в, г), являются частными случаями общего решения, определяемого уравнением (7.41).

Если частоты складываемых колебаний различны, в общем случае траектории принимают довольно сложный вид, называемый фигурами Лиссажу. Например, если частота колебаний вдоль оси OY вдвое превосходит частоту колебаний вдоль оси OX $\omega_y = 2\omega_x$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ получим фигуру, представленную на рисунке.



Из соотношения частот следует, что число пересечений данной кривой с осью X вдвое больше, чем с осью Y. Таким образом получаем, что отношение частот, равно обратному отношению числа пересечений траектории точки с соответствующими осями.

$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{N_y}{N_x}. \qquad (7.42)$$

Таким образом, фигуры Лиссажу могут быть использованы для определения частоты неизвестного сигнала, например с помощью осциллографа. Для этого на один вход осциллографа необходимо подать сигнал известной частоты, а на второй – исследуемый сигнал. Известную частоту сигнала нужно подбирать так, чтобы легко можно было определить число пересечений, полученной фигуры Лиссажу с координатными осями.

При произвольном соотношении частот фигуры Лиссажу имеют довольно сложную форму.

Зная правила сложения взаимно перпендикулярных колебаний и колебаний, направленных вдоль одной прямой, можно складывать колебания, направленные под углом друг к другу. В этом случае достаточно одно из них представить в виде двух составляющих: параллельной и перпендикулярной к другому колебанию.

VIII. ДЕФОРМАЦИИ. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

Если на тело подействовать силой, то форма тела, вообще говоря, изменится, в таком случае говорят, что тело деформировалось. При изучении динамики твердых тел мы не учитываем их деформаций, считая, что они достаточно малы и не меняют характера рассматриваемых явлений. Однако все реальные тела деформируемы. В случае твердых тел различают два предельных случая: деформации упругие и деформации пластические. Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения действия приложенных сил. Пластическими, или остаточными деформациями называются такие, которые остаются в теле и после прекращения действия приложенных сил. Является ли деформация упругой или пластической зависит не только от материала, но и от величины приложенных сил.

Законы, связывающие силы и деформации в общем случае достаточно сложны, так как связь между силами и деформациями в общем случае неоднозначна и зависит от величины и характера изменений, приложенных сил и других причин.

Рассмотрим деформации стальной длинной проволоки.

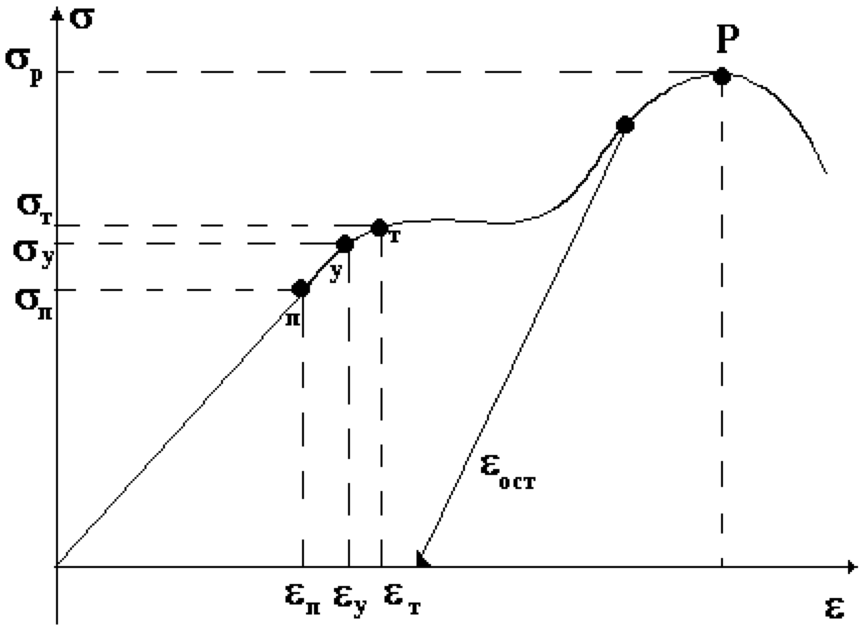
Если материал проволоки однороден, то будем иметь однородную деформацию растяжения, которую можно охарактеризовать относительным удлинением ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0}, \tag{8.1}$$

где Δl_0 – удлинение какого-либо участка, имевшего первоначальную длину l_0.

Величину силы, действующей на единицу площади поперечного сечения, называют напряжением и обозначают его σ:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{8.2}$$



Зависимость возникающего в теле напряжения, от величины деформации ε представлена на рисунке. При небольших значениях, напряжение σ и деформация ε примерно пропорциональны друг другу (до точки *П*). На этом участке справедлив закон Гука: деформация прямо пропорциональна напряжению:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{8.3}$$

Коэффициент E – называется модулем Юнга. Напряжение $\sigma_п$ и деформация $\varepsilon_п$ называются пределом пропорциональности. Модуль Юнга E зависит только от материала тела и его физического состояния.

До точки *У* наблюдается однозначная связь между напряжением и деформацией, тело полностью восстанавливает форму после снятия напряжения, σ_y, ε_y – пределы упругости.

После точки *T* деформации быстро нарастают при незначительных изменениях напряжения, это предел текучести σ_T, ε_T. Если деформации больше ε_T, то после снятия нагрузки форма уже восстанавливается не полностью, возникают остаточные деформации.

Далее, за точкой *T* с увеличением деформаций напряжение несколько возрастает, достигает в точке *P* максимума, и затем кривая обрывается, что соответствует разрушению образца.

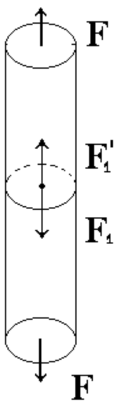
§37. Растяжение и сжатие

Рассмотрим однородный стержень, к концам которого приложены растягивающие силы F, стержень будет деформирован – растянут. Чтобы стержень был в равновесии необходимо, чтобы на любое его сечение действовали противоположно направленные, равные по величине силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_1'$, то есть

$$\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_1'\right|. \tag{8.4}$$

Если стержень растянут, то напряжение называют натяжением:

$$T = \frac{F}{S}.$$



Если сжат – давлением:

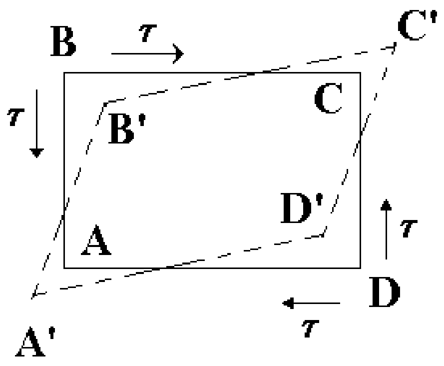
$$P = \frac{F}{S}.$$

Под действием растягивающей или сжимающей силы изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. В случае растягивающей силы они уменьшаются, в случае сжимающей – увеличиваются.

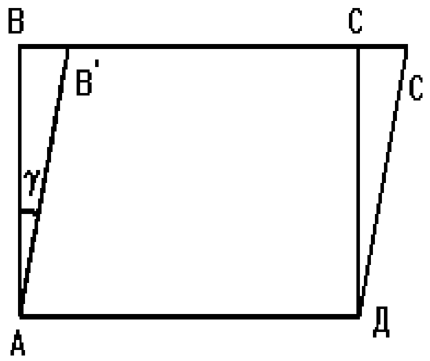
Обозначим $-\dfrac{\Delta a}{a_0}$ – относительное поперечное сжатие. Введем величину

$$\mu = -\frac{\dfrac{\Delta a}{a_0}}{\dfrac{\Delta l}{l_0}} = -\frac{\Delta a}{\Delta l}\frac{l_0}{a_0}, \tag{8.5}$$

характеризующую отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему относительному удлинению. Эта величина называется коэффициентом Пуассона. Он зависит только от материала тела и является одной из важных постоянных, характеризующих упругие свойства материала.



Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие характеристики могут быть выражены через E и μ. Рассмотрим куб из однородного и изотропного вещества. Приложим к противоположным граням его равные и противоположно направленные силы. Под действием приложенных напряжений куб будет деформироваться и в сечении вместо квадрата будет ромб. Объем куба при таких деформациях практически не меняется. Если повернуть ромб, так, чтобы $A'Д'$ совпадало с $AД$, то видно, что все слои куба параллельные основанию сдвинулись в одном и том же направлении, параллельном основанию. Такая деформация называется <u>сдвигом</u>.



Величина сдвига пропорциональна расстоянию сдвигаемого слоя от основания $AД$.

Угол γ между AB и AB' называется углом сдвига. Для деформации сдвига, при малых углах сдвига γ, можно записать закон Гука:

$$\tau = G\gamma, \tag{8.6}$$

где τ – касательное напряжение, действующее на грани куба.

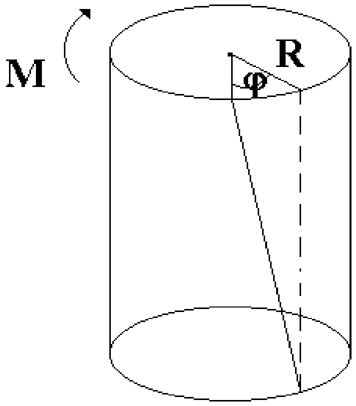
G – называется <u>модулем сдвига</u> и зависит от материала, из которого изготовлен образец. Его можно выразить через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{8.7}$$

§38. Кручение и изгиб

Деформации растяжения-сжатия и сдвига относятся к однородным деформациям, то есть все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково. Деформации кручения и изгиба относятся к неоднородным деформациям.

Если взять стержень, один из его концов закрепить, а ко второму приложить вращающий момент M, относительно оси стержня, стержень закрутится, каждый радиус свободного основания повернется относительно закрепленного основания на угол φ. Это и есть деформация кручения. Закон Гука для такой деформации записывается в виде:



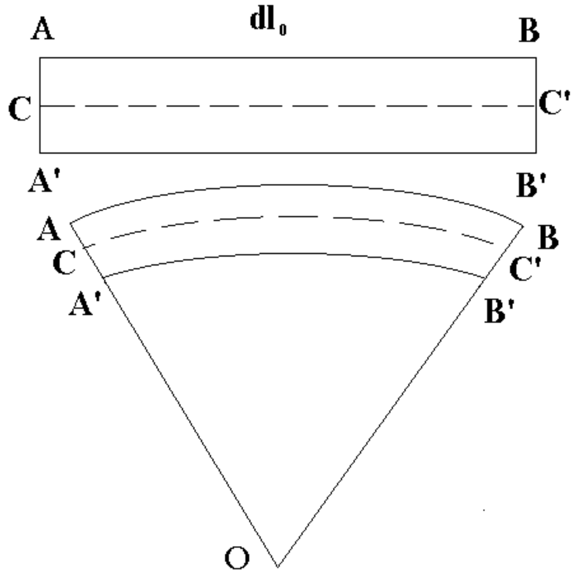
$$M = f\varphi, \tag{8.8}$$

где f – модуль кручения. В отличие от введенных ранее модулей E, μ и G, модуль кручения зависит не только от материала, но и от геометрических размеров и формы образца. Для сплошного стержня

$$f = \frac{\pi G}{2l} r^4,$$

где l – длина стержня, r – его радиус.

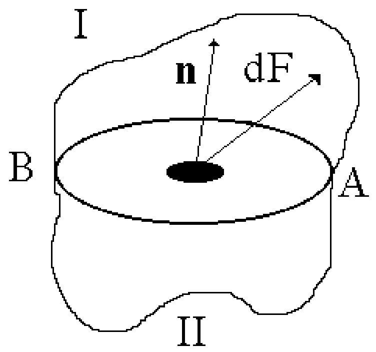
Рассмотрим деформацию изгиба однородной балки, произвольного сечения, но так, чтобы для всей длины балки это сечение оставалось неизменным. Выделим бесконечно малый элемент длины dl_0. В результате изгиба все параллельные прямые перейдут в дуги окружностей (в силу малости выделенного элемента) с центром в точке О. Ось, проходящая через О, перпендикулярно плоскости рисунка, называется осью изгиба.



Сечения, лежащие выше линии CC', будут растянуты, ниже – сжаты. Длина линии CC' остается неизменной. Линия CC' называется нейтральной линией. Участки балки, прилегающие к этой линии, остаются недеформированными. Этим свойством пользуются для облегчения конструкций и экономии материалов. Балки, рассчитанные на деформации изгиба, делают полыми, используют, так называемые тавровые и двутавровые балки. Изгиб можно представить как комбинацию сжатия и растяжения со сдвигом.

§39. Тензор упругих напряжений

Рассмотрим произвольное деформированное тело. Мысленно проведем сечение *AB*, делящее тело на две части. Тогда если первая часть действует на вторую с силой $\vec{F}$, то вторая действует на первую с силой $-\vec{F}$. Однако для характеристики деформации недостаточно знать суммарную силу, необходимо знать, как силы распределены по сечению.



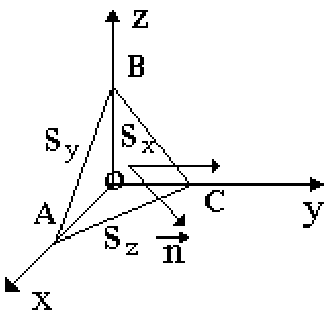
Выберем бесконечно малую площадку ds, действующая на нее сила $d\vec{F}$, тогда $\frac{d\vec{F}}{ds}=\vec{\sigma}$ – напряжение, действующее в соответствующей точке на границе раздела. Ориентацию площадки выберем, задав направление внешней нормали $\vec{n}$ к ней, тогда $\vec{\sigma}_n$ будет соответствующее напряжение, а $\vec{\sigma}_{-n}$ – напряжение, действующее с противоположной стороны площадки. Причем, в состоянии равновесия $\vec{\sigma}_n=-\vec{\sigma}_{-n}$.

Вектор напряжения $\vec{\sigma}_n$ можно разложить на две составляющие: вдоль нормали, и лежащую в плоскости, перпендикулярной к ней, тогда первая составляющая называется нормальным, а вторая тангенциальным напряжением. Как и всякий вектор, напряжение $\vec{\sigma}_n$ можно разложить на составляющие в прямоугольной системе координат *X, Y, Z*. Обозначим их σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}. Первый индекс указывает направление внешней нормали к поверхности тела, на которой лежит площадка ds, а второй направление оси, на которую проектируется напряжение $\vec{\sigma}_n$. Например $\vec{\sigma}_x$ – напряжение на площадке, внешняя нормаль к которой параллельна положительному направлению оси *X*. Тогда σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} обозначают проекции $\vec{\sigma}_x$ на координатные оси.

Чтобы определить напряжение в среде на произвольно ориентированной площадке в какой-либо точке ее, достаточно задать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку. Это справедливо как для покоящейся среды, так и для среды, движущейся с произвольным ускорением. Для доказательства поместим начало координат в рассматриваемую точку и выделим бесконечно малый элемент объема. Пусть $\vec{n}$ внешняя нормаль к плоскости треугольника *ABC*. Тогда сила, действующая на плоскость треугольника ABC, есть $\vec{\sigma}_n s$, аналогично на трех боковых гранях:

$$\vec{\sigma}_{-x} s_x,\ \vec{\sigma}_{-y} s_y,\ \vec{\sigma}_{-z} s_z.$$

Помимо указанных сил, могут действовать и другие силы, например, сила тяжести, силы такого типа относятся к массовым или объемным силам. Пусть равнодействующая этих сил есть $\vec{f}$, причем она пропорциональна объему выделенного элемента. Если масса элемента m, а ускорение $\vec{w}$, то:



$$m\vec{w} = \vec{f} + \vec{\sigma}_n s + \vec{\sigma}_{-x} s_x + \vec{\sigma}_{-y} s_y + \vec{\sigma}_{-z} s_z. \quad (8.10)$$

Если выполнить предельный переход, стягивая объем в точку, то, как масса выделенного объема, так и действующая на него сила, будут стремиться к нулю $m \to 0$ и $f \to 0$, так как это бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с остальными членами. Из геометрических соображений

$$s_x = sn_x, \quad s_y = sn_y, \quad s_z = sn_z. \quad (8.11)$$

Подставляя выражения (8.11) в уравнение (8.10) и учитывая соотношения между векторами напряжения

$$\vec{\sigma}_x = -\vec{\sigma}_x, \quad \vec{\sigma}_y = -\vec{\sigma}_y, \quad \vec{\sigma}_z = -\vec{\sigma}_z,$$

получим:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z, \quad (8.12)$$

так как оси *X, Y, Z* были выбраны произвольно, то (8.12) доказывает сделанное утверждение.

Таким образом, напряжение в каждой точке упруго деформированного тела можно характеризовать тремя векторами $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ или девятью их проекциями:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Совокупность этих девяти компонент называется тензором упругих напряжений.

В общем случае эти величины являются функциями координат.

Тензор упругих напряжений является симметричным тензором $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Доказательство провести самостоятельно.

Так как это симметричный тензор его можно привести к диагональному виду или к главным осям

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

IX. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

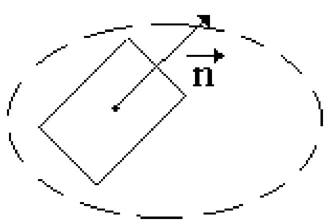
В отличие от твердых тел жидкости и газы не имеют собственной формы и принимают форму того сосуда, который они заполняют.

Разделение на жидкости, газы и твердые тела до некоторой степени условно и вполне оправдано только в механике, так как, вообще говоря, одно и то же вещество, например, вода, в зависимости от условий может находиться в любом из указанных агрегатных состояний.

В курсе механики не рассматривается молекулярное строение тел, все они рассматриваются как сплошные и непрерывные, причем предполагается, что твердое тело обладает определенными формой и объемом, жидкое – только определенным объемом, газообразное не имеет ни формы, ни объема ему присущего. Этот факт обычно выражают словами: в состоянии равновесия жидкости и газы не обладают упругостью формы. Они обладают только объемной упругостью.

В состоянии равновесия напряжение в жидкости и газе всегда нормально к площадке, на которую оно действует.

Касательные напряжения вызывают только изменения формы объема, но не величину объема, но для таких деформаций (из-за отсутствия собственной формы) усилий не требуется, поэтому с точки зрения механики, жидкости и газы можно определить как среды, в которых при равновесии касательные напряжения существовать не могут.



Отсюда следует, что в состоянии равновесия величина нормального напряжения в жидкости или газе не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. Для доказательства возьмем произвольно ориентированную площадку, с внешней нормалью $\vec{n}$. Так как напряжение нормально к площадке, представим его в виде:

$$\vec{\sigma}_n = -P\vec{n}. \tag{9.1}$$

Напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям запишутся в виде:

$$\vec{\sigma}_x = -P_x\vec{i}, \quad \vec{\sigma}_y = -P_y\vec{j}, \quad \vec{\sigma}_z = -P_z\vec{k}. \tag{9.2}$$

Здесь P_i давление на площадках, перпендикулярных соответствующим осям. Подставляя эти значения в формулу (8.12), получим:

$$P\vec{n} = P_x n_x \vec{i} + P_y n_y \vec{j} + P_z n_z \vec{k}. \qquad (9.3)$$

Умножая (9.3) скалярно последовательно на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, получим:

$$P = P_x = P_y = P_z.$$

Откуда следует, что в состоянии равновесия нормальное напряжение (давление P) не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. Это закон Паскаля.

В механике при изучении движения собственно жидкостей и газов, газ понимают как предельный случай жидкости. Таким образом, под жидкостью в обобщенном смысле слова понимают, как собственно жидкость, так и газ. Раздел механики, занимающийся изучением движения и равновесия жидкостей, называется гидродинамикой.

Жидкости очень мало сжимаемы, поэтому очень часто, когда можно пренебречь изменением объема, вводят понятие абсолютно несжимаемой жидкости.

Мы уже говорили, что в покоящейся жидкости отсутствуют сдвиговые (касательные) напряжения. Если же жидкость находится в движении, то в ней могут возникать и касательные силы. Они определяются скоростями и деформацией, поэтому они относятся к классу сил трения или вязкости.

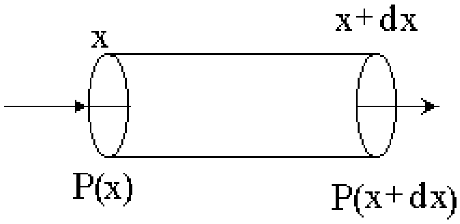
Эти силы называются касательными или сдвиговыми силами вязкости, наряду с ними могут существовать еще и объемные (нормальные) силы трения, от обычных сил давления P они отличаются тем, что определяются не степенью сжатия, а скоростью сжатия.

Жидкость, в которой при любых движениях не возникают никакие силы внутреннего трения, называется идеальной.

§40. Основное уравнение гидростатики

Силы, действующие в жидкости, разделяют на массовые (объемные) и поверхностные. Массовая сила пропорциональна объему, на который она действует. Ее можно представить в виде $\vec{f}dv$, где $\vec{f}$ – объемная плотность силы. К массовым силам относятся сила тяжести и сила инерции.

Рассмотрим случай, когда касательных напряжений нет. В идеальной жидкости так будет всегда, в остальных случаях – когда жидкость покоится, то есть в гидростатике. Выделим в жидкости бесконечно малый объем жидкости dv, цилиндрической формы, пусть ось X совпадает с осью цилиндра. Площадь его основания dS, высота dx. Определим равнодействующую сил давления, действующих на этот цилиндр. Поперечные размеры таковы, что можно считать, что давление во всех точках основания dS одно и то же. Тогда результирующая сила будет:



$$[P(x)-P(x+dx)]dS=\left[P(x)-P(x)-\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{y,z,t}dx\right]dS=-\frac{\partial P}{\partial x}dv, \quad (9.4)$$

так как $dv=dxdS$.

То есть величина силы пропорциональна величине выделенного объема dv, ее можно представить в виде $f'_x dv$, где f'_x – x-составляющая силы, действующей на единицу объема жидкости, возникающая из-за изменения нормального давления P в пространстве. Аналогично для других осей:

$$f'_x=-\frac{\partial P}{\partial x}, \quad f'_y=-\frac{\partial P}{\partial y}, \quad f'_z=-\frac{\partial P}{\partial z}. \quad (9.5)$$

Тогда сам вектор $\vec{f}'$ можно представить в виде:

$$\vec{f}'=-gradP, \quad (9.6)$$

то есть, объемная плотность результирующей сил давления $\vec{f}'$, действующих на элементы объема жидкости, равна градиенту давления, взятому с противоположным знаком.

Если жидкость находится в равновесии, то сила f' должна уравновешиваться массовой силой $\vec{f}$, то есть $\vec{f}'=-\vec{f}$.

Тогда

$$gradP=\vec{f}. \quad (9.7)$$

Это уравнение называется основным уравнением гидростатики. В проекциях на координатные оси оно запишется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z.$$

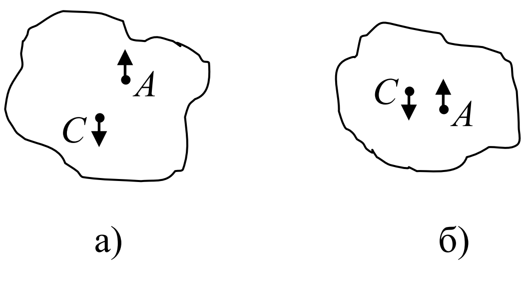
Уравнение (9.7) показывает, что при равновесии жидкости, плотность силы должна выражаться градиентом однозначной скалярной функции. Это необходимое и достаточное условие консервативности. Таким образом, для равновесия жидкости необходимо, чтобы силовое поле, в котором она находится, было консервативным.

В заключение рассмотрения гидростатики остановимся на законе Архимеда.

Если тело, погруженное в жидкость, удерживается в механическом равновесии, то со стороны окружающей жидкости оно подвергается выталкивающей силе гидростатического давления, числено равной весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Эта выталкивающая сила направлена вверх и приложена к центру масс жидкости, вытесненной телом.

Центр масс жидкости, вытесненной телом, называется центром плавучести. Для равновесия тела, погруженного в жидкость, необходимо, чтобы вес тела был равен весу вытесненной жидкости, а центр плавучести *A* лежал бы на одной вертикали с центром масс самого тела *C*.

Равновесие может быть устойчивым и неустойчивым. Для тела полностью погруженного в жидкость равновесие устойчиво, если центр плавучести лежит выше центра масс и неустойчиво, если наоборот.



а) устойчивое и б) неустойчивое положения равновесия.

На законе Архимеда основано плавание различных судов. Суда строят так, чтобы центр плавучести всегда находился выше его центра тяжести.

§41. Уравнение Эйлера

Рассмотрим движущуюся жидкость, выделив единичный объем, тогда, в соответствии со вторым законом Ньютона,

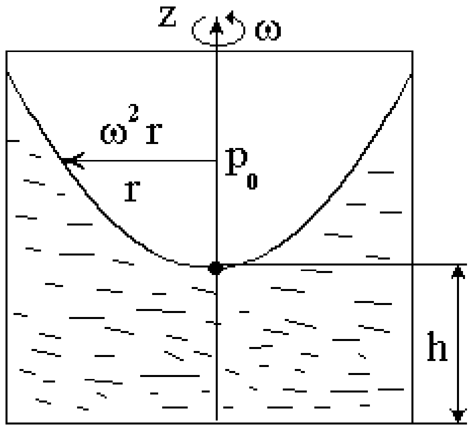
$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} + \vec{f}\,',$$

где $\vec{f}$ – плотность массовой силы; $\vec{f}\,'$ – плотность сил, связанных с изменением давления, учитывая соотношение (9.6), найдем:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - gradP, \tag{9.8}$$

$\frac{d\vec{V}}{dt}$ – ускорение в данной точке.

Уравнение (9.8) называется уравнением Эйлера. Применим его к описанию движения жидкости во вращающемся сосуде. Если она вращается как целое, то в ней не возникают силы внутреннего трения, и все действующие силы, сводятся к силам нормального давления и силе тяжести, то есть условия, при которых справедливо уравнение Эйлера, выполнены. При равномерном вращении есть только центростремительное ускорение $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\omega^2\vec{r}$, $\vec{f} = \rho\vec{g}$ – плотность силы тяжести. Тогда вместо уравнения (9.8) будем иметь:



$$-\rho\omega^2\vec{r} = \rho\vec{g} - gradP. \tag{9.9}$$

Или в проекциях (ось z совпадает с осью вращения):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{9.9a}$$

Учитывая, что написанные уравнения являются уравнениями в частных производных, разделяя в первом из написанных уравнений переменные и пренебрегая сжимаемостью, то есть, считая $\rho = const,$ после интегрирования получим

$$dP = \rho\omega^2 x dx; \qquad P = \rho\omega^2 \frac{x^2}{2} + \varphi(y,z). \qquad (9.9б)$$

Поскольку уравнения (9.9а) в частных производных, интегрирование по x определяет давление с точностью до произвольной функции $\varphi(y,z)$, которая подлежит определению. Для ее определения поступим следующим образом: продифференцируем (9.9б) по y и, учитывая второе уравнение (9.9а), получим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y = \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y},$$

интегрируя последнее равенство по y, найдем $\varphi(y,z)$:

$$\varphi(y,z) = \rho\omega^2 \frac{y^2}{2} + \psi(z). \qquad (9.9г)$$

Подставляя найденное значение функции $\varphi(y,z)$ (9.9г) в выражение (9.9б), получим

$$P = \rho\omega^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \psi(z). \qquad (9.9д)$$

Здесь функция $\psi(z)$ подлежит определению. Дифференцируя соотношение (9.9д) по z, с учетом последнего уравнения (9.9а), можно написать

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = \frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Интегрируя последнее соотношение, найдем функцию $\psi(z)$

$$\psi(z) = -\rho g z + const.$$

Подставляя $\psi(z)$ в (9.9д) найдем давление:

$$P = \rho\omega^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) - \rho g z + const\,. \qquad (9.9e)$$

Постоянную, входящую в (9.9е) найдем из условия равенства давления в начале координат атмосферному давлению:

$$P(0,0,0) = P_0 = const\,.$$

Подставляя найденное значение постоянной величины в (9.9е), окончательно получим выражение для искомого давления:

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2) - \rho g z + P_0 \qquad (9.10)$$

или

$$P = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + P_0,$$

P_0 – атмосферное давление.

Уравнение свободной поверхности получим, положив $P = const$, тогда:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z = const\,. \qquad (9.11)$$

Это уравнение параболоида вращения, обращенного выпуклостью вниз.

Если дно сосуда плоское, то положив $z = -h$, получим давление на дно сосуда (h – глубина в центре параболоида):

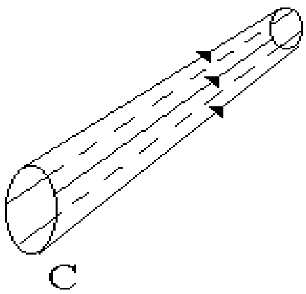
$$P - P_0 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\,. \qquad (9.12)$$

Давление в центре минимально и монотонно возрастает к краям. Этим объясняется факт собирания чаинок в центре стакана при перемешивании чая.

§42. Стационарное течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

Для описания движения жидкости можно поступить двояко. Можно проследить за движением каждой отдельной частицы жидкости, то есть определить их траектории, или проследить за тем, что происходит в каждой отдельной точке пространства, то есть указать величины и направления скоростей различных частиц жидкости, проходящих через одну и ту же точку пространства. Если взять различные точки пространства и указать скорости в них в один и тот же момент времени, то получится поле скоростей.

Линия, касательная к которой в каждой точке указывает направление скорости частицы, проходящей через данную точку, называется линией тока. Если поле скоростей (линии тока) не меняется с течением времени, движение называется стационарным или установившимся, скорость зависит только от координат $\vec{V}=\vec{V}(\vec{r})$. При стационарном движении линии тока совпадают с траекториями частиц. Если выделить в жидкости замкнутый контур и через каждую его точку провести в один и тот же момент времени линии тока, они образуют некоторую замкнутую поверхность, называемую трубкой тока. Масса жидкости, протекающей за время dt через поперечное сечение трубки тока, (если оно бесконечно мало и скорость можно считать постоянной) есть:



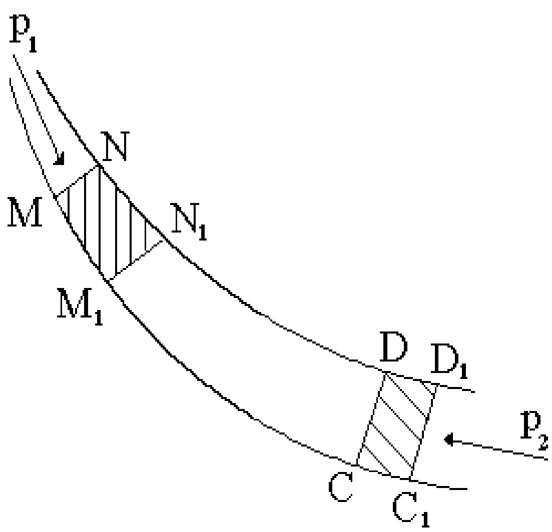
$$dm=\rho VSdt. \tag{9.13}$$

Если течение стационарно, то масса будет одной и той же для всех сечений трубки тока:

$$\rho_1 V_1 S_1=\rho_2 V_2 S_2. \tag{9.14}$$

Если жидкость несжимаема, то $\rho_1=\rho_2$ и будем иметь:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_2}{S_1},$$



то есть, скорость жидкости тем больше, чем меньше площадь поперечного сечения. Уравнение (9.14) называется уравнением неразрывности струи.

Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости в консервативном силовом поле (поле тяготения). Выделим трубку тока и вычислим работу сил давления по перемещению части жидкости *MNDC* в новое положение $M_1N_1D_1C_1$. При перемещении границы MN в положение M_1N_1 совершается работа

$$A_1 = P_1 \Delta v_{MNM_1N_1} = P_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1}.$$

Аналогично для перехода CD в C_1D_1

$$A_2 = P_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2},$$

так как движение стационарно $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$, тогда суммарная работа равна

$$A = A_1 - A_2 = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \Delta m. \qquad (9.15)$$

С другой стороны суммарная работа A равна полному изменению механической энергии $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m$, где ε – энергия единицы массы. Подставляя ΔE в (9.15) и сокращая на Δm, получим:

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}, \qquad (9.16)$$

то есть, вдоль одной и той же линии тока при стационарном течении идеальной жидкости величина $\varepsilon + \dfrac{P}{\rho}$ остается постоянной:

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = B = const. \qquad (9.17)$$

Уравнение (9.17) называется уравнением Даниила Бернулли. Оно справедливо для стационарного течения идеальных жидкостей, как сжимаемых, так и несжимаемых. Для несжимаемой жидкости в однородном поле тяготения можно написать:

$$\frac{V^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = B = const,$$

или

$$\rho\frac{V^2}{2} + \rho gh + P = const. \qquad (9.18)$$

Величина P называется статическим давлением и определяет давление в неподвижной жидкости, ρgh – гидростатическое давление, определяет изменение давления при изменении высоты h, $\rho\frac{V^2}{2}$ – гидродинамическое давление, обусловлено движением жидкости.

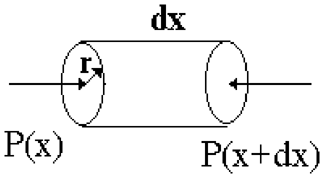
Из уравнения (9.18) видно, что при заданном h давление больше там, где скорость меньше, то есть при $h = const$:

$$\rho\frac{V^2}{2} + P = const.$$

А с другой стороны, как следует из уравнения неразрывности струи скорость меньше там, где больше сечение потока. При течении жидкости по горизонтальным трубам переменного сечения в широких частях труб давление максимально.

§43. Стационарное течение жидкости по прямолинейной трубе. Формула Пуазейля

Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, текущую вдоль горизонтальной цилиндрической трубы радиуса R. Линии тока параллельны оси трубы. Если выделить произвольную, бесконечно узкую трубку тока длиной dx и радиусом r, то из условия несжимаемости следует, что скорость



течения будет одна и та же вдоль всей линии тока (трубки тока) – следовательно, скорость жидкости не может меняться вдоль трубы. Таким образом, скорость будет функцией расстояния от центра трубы.

Совместим ось X с осью трубы. Выделим произвольный объем цилиндрической формы, высотой dx и осью, совпадающей с осью трубы. На его боковую поверхность действует касательная сила вязкости, пропорциональная коэффициенту вязкости η, градиенту скорости и площади боковой поверхности цилиндра:

$$dF = 2\pi r\eta \frac{dV}{dr} dx. \tag{9.19}$$

С другой стороны, есть еще сила, обусловленная разностью давлений, которая пропорциональна площади основания цилиндра:

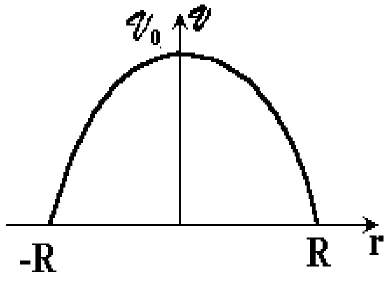
$$dF_1 = \pi r^2 [P(x) - P(x+dx)] = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx. \tag{9.20}$$

При стационарном течении сумма сил, действующих на выделенный объем равна нулю $dF_1 + dF = 0$, таким образом:

$$2\eta \frac{dV}{dr} = r\frac{dP}{dx}.$$

Как скорость $V(r)$, так и $\frac{dV}{dr}$, как указано выше, от x не зависят, следовательно, от x не зависит $\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{l}$, где l – длина трубы. Тогда

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \tag{9.21}$$



Разделяя в уравнении (9.21) переменные и интегрируя, получим:

$$\int dV = -\int \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r dr.$$

Откуда

$$V = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C .$$

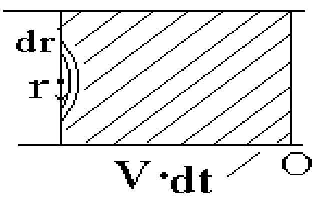
Учитывая, что на стенке трубы жидкость покоится, то есть при $r = R$, $V = 0$, найдем значение постоянной $C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$. Окончательно будем иметь:

$$V = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}(R^2 - r^2), \tag{9.22}$$

то есть скорость максимальна на оси трубы и убывает по параболическому закону к стенкам трубы.

Легко подсчитать расход жидкости, то есть количество ее, протекающее в единицу времени через поперечное сечение трубы Q. Выделим в трубе кольцо, толщиной dr, через него за единицу времени протекает масса жидкости $dQ = 2\pi r dr \rho V$, откуда:

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4 . \tag{9.23}$$



Расход жидкости прямо пропорционален разности давлений, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине трубы и коэффициенту вязкости.

Формула (9.23) называется формулой Пуазейля и справедлива для ламинарных течений.

В зависимости от характера движения частиц жидкости течения разделяют на ламинарные и турбулентные.

Ламинарным называется течение, когда частицы жидкости движутся по непересекающимся траекториям – линиям тока (при ламинарном течении в трубе, линии тока параллельны оси трубы). При больших скоростях это условие не выполняется, в потоке жидкости возникают вихри, говорят, что течение становится турбулентным. Можно сказать, что турбулентное течение – это набор вихрей разной величины, которые приводят к перемешиванию жидкости во всем объеме.

Характер течения жидкости зависит от соотношения между полной энергией потока и ее потерями на совершение работы против сил вязкого трения. Таким образом, вопрос об учете сил трения связан с диссипацией энергии. Если она мала, силы вязкого трения можно не учитывать.

Мощность сил трения

$$W_{\text{тр}} = \Delta P \pi R^2 \langle V \rangle . \tag{9.24}$$

Кинетическая энергия потока в единицу времени:

$$K = \int \frac{\rho V^2}{2} dSV = \frac{\rho}{2} \pi R^2 \langle V^3 \rangle . \tag{9.25}$$

Учитывая, что средние значения скорости пропорциональны ее максимальному значению $\langle V^n \rangle \sim V_0^n$, получим:

$$\frac{K}{W_{\text{тр}}} = \frac{\rho \langle V^3 \rangle}{2\Delta P \langle V \rangle} \sim \frac{\rho V_0^2}{\Delta P} .$$

Подставляя сюда $V_0 = \dfrac{\Delta P R^2}{4\eta l}$ из соотношения (9.22) и выполняя преобразования, найдем:

$$\frac{K}{W_{\text{тр}}} \sim \frac{\rho R^4 \Delta P^2}{16\eta^2 l^2 \Delta P} \sim \frac{\rho R^4}{16\eta^2 l^2} \Delta P \sim \frac{\rho V_0 l}{\eta} \left(\frac{R}{l} \right)^2 = \mathrm{Re} \left(\frac{R}{l} \right)^2 , \tag{9.26}$$

где $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho V_0 l}{\eta}$ – <u>число Рейнольдса</u>. Таким образом, число Рейнольдса характеризует роль сил вязкости при течении жидкости.

При течении по круглой цилиндрической трубе ламинарный режим сохраняется до значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 2000$, при $\mathrm{Re} > 3000$ течение становится турбулентным, для $2000 < \mathrm{Re} < 3000$ наблюдается переходной режим течения.

X. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Неинерциальной системой отсчета называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной. Ускоренное движение включает в себя как поступательное движение, так и вращение.

В неинерциальных системах отсчета теряет смысл понятие одновременности, однако если скорости малы, и справедливы, с достаточной точностью, преобразования Галилея, то пространственно-временные соотношения в неинерциальной системе таковы же, как если бы она была инерциальной.

В инерциальных системах единственной причиной ускоренного движения тела являются силы, действующие на него со стороны других тел. Сила всегда есть результат взаимодействия тел.

В неинерциальных системах отсчета существуют ускорения, которые не связаны с силами такого же характера, какие известны в инерциальных системах отсчета. Поэтому первый закон Ньютона в них не имеет смысла. Третий закон Ньютона, вообще говоря, выполняется, хотя и не имеет такого явного физического смысла как в инерциальных системах отсчета.

Для описания движения в неинерциальных системах отсчета условились считать, что ускорения в них вызываются только силами, причем наряду с силами «обычной» природы существуют и так называемые силы инерции. Второй закон Ньютона остается в силе, но наряду с силами взаимодействия необходимо учесть силы инерции.

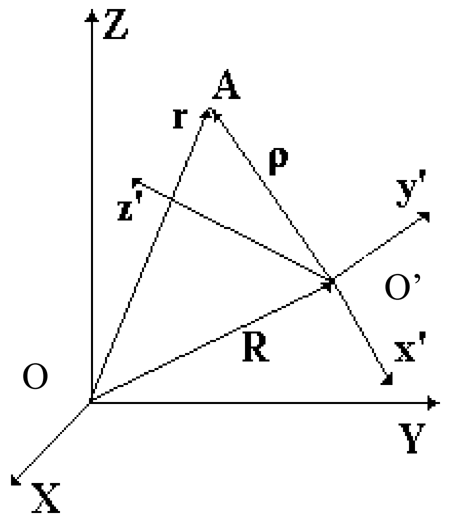
Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета относительно инерциальной системы, они берутся такими, чтобы обеспечить в неинерциальной системе отсчета, те ускорения, которые фактически имеются, но обычными силами взаимодействия полностью не объясняются.

Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета имеет вид:

$$m\dot{\vec{V}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}, \tag{10.1}$$

здесь $\vec{w} = \dot{\vec{V}}$ – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета; $\vec{F}$ – равнодействующая обычных сил взаимодействия; $\vec{F}_{\text{ин}}$ – равнодействующая сил инерции.

Силы инерции столь же реальны, как и ускорения в неинерциальных системах отсчета.



Рассмотрим неинерциальную систему $X'Y'Z'$, движущуюся относительно инерциальной XYZ.

Радиус-вектор частицы (тела) в неинерциальной системе $\vec{\rho}$, в инерциальной – $\vec{r}$, радиус-вектор начала координат O' неинерциальной системы отсчета – $\vec{R}$.

Тогда

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}. \qquad (10.2)$$

Пусть неинерциальная система отсчета движется поступательно и вращается. Чтобы связать ускорения в различных системах продифференцируем соотношение (10.2) по времени

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}. \qquad (10.3)$$

При рассмотрении кинематики, было показано, что производная радиус-вектора частицы, движущейся поступательно и совершающей вращательное движение, есть:

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{\rho}], \qquad (10.4)$$

здесь $\vec{V}$ – скорость поступательного движения тела в неинерциальной системе отсчета, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения системы отсчета.

Подставим выражение (10.4) в (10.3):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{\rho}]. \qquad (10.5)$$

Продифференцируем (10.5), с учетом (10.4) и того факта, что $\dot{\vec{V}} = \vec{w} + [\vec{\omega}\vec{V}]$, где $\vec{w}$ – ускорение (линейное) в неинерциальной системе отсчета. После выполнения необходимых преобразований, получим

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{w} + [\vec{\omega}\vec{V}] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}] + [\omega(\vec{V} + [\vec{\omega}\vec{\rho}])]. \qquad (10.6)$$

Умножим (10.6) почленно на m и учтем, что $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ – равнодействующая обычных сил взаимодействия, так как $\vec{r}$ описывает движение тела в инерциальной системе отсчета. Тогда выполняя элементарные преобразования, получим:

$$m\vec{w} = \vec{F} - m\left\{\ddot{\vec{R}} + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] + 2\left[\vec{\omega}\vec{V}\right] + \left[\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}\right]\right\}. \qquad (10.7)$$

Выражение (10.7) дает закон движения в неинерциальной системе отсчета. Выражение в фигурных скобках называется силами инерции, которые зависят от характеристик системы:

$-m\ddot{\vec{R}}$ – линейная сила инерции, обусловлена поступательным движением системы отсчета, при отсутствии вращения это единственная сила инерции, она определяется линейным ускорением неинерциальной системы;

$-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]]$ – центробежная сила инерции, обусловлена вращением системы;

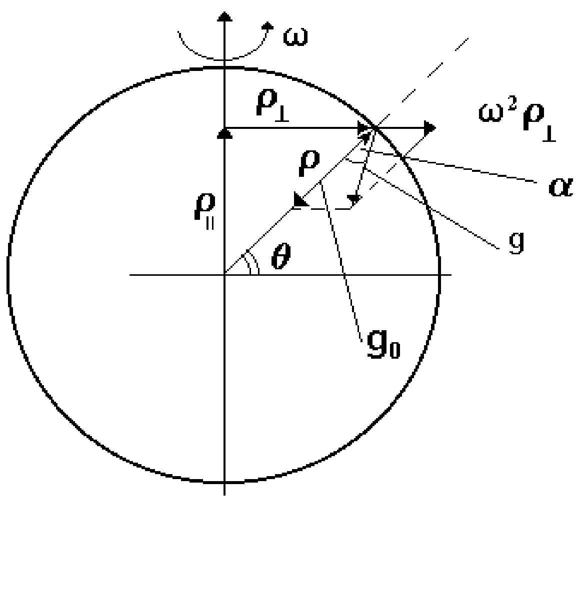
$-2m\left[\vec{\omega}\vec{V}\right]$ – сила Кориолиса, обусловлена поступательным движением во вращающейся системе;

$-m\left[\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}\right]$ – сила инерции, обусловленная неравномерностью вращения системы отсчета.

Подчеркнем еще раз, что силы инерции – реальные силы с точки зрения механики. Они проявляют себя через реально наблюдаемые явления.

Источник сил инерции – тело сообщившее системе ускорение, источник сил инерции всегда лежит вне системы отсчета.

§44. Земля неинерциальная система отсчета



Первый вопрос, который возникает при изучении механических явлений на Земле, связан с возможностью выяснения неинерциальности (или инерциальности) системы отсчета, связанной с Землей. Можно ли опытами на Земле установить неинерциальность связанной с ней системы отсчета?

Для решения этого вопроса вновь вернемся к уравнению (10.7) и перепишем его, учитывая, что Земля вращается равномерно, то есть $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Обозначим $\vec{f} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}$, где под $\vec{f}$ следует понимать результирующую всех сил действующих на тело со стороны Земли и тел на Земле, тогда

$$m\vec{w} = \vec{f} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] + 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \qquad (10.8)$$

Преобразуем выражение для центробежной силы инерции, представив $\vec{\rho} = \vec{\rho}_{\parallel} + \vec{\rho}_{\perp}$, где $\vec{\rho}_{\parallel}$ – составляющая радиус-вектора, параллельная $\vec{\omega}$; $\vec{\rho}_{\perp}$ – перпендикулярная, причем $|\vec{\rho}_{\perp}|$ – дает радиус окружности определяющей широту, на которой находится тело.

Тогда

$$\begin{gathered} [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]] = \vec{\omega}\omega\rho\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) - \vec{\rho}\vec{\omega}^2 = -\vec{\rho}_{\perp}\omega^2 \\ |[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]]| = \rho_{\perp}\omega^2 \end{gathered}. \qquad (10.9)$$

После подстановки выражения (10.9) в (10.8), получим:

$$m\vec{w} = \vec{f} + m\omega^2\vec{\rho}_{\perp} + 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \qquad (10.10)$$

Найдем вес тела, покоящегося на поверхности Земли.

Весом тела называется сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. При этом предполагается, что тело, подвес и опора покоятся в той системе отсчета, в которой производится взвешивание, в нашем случае они должны покоиться относительно Земли.

Пусть тело находится на подставке и покоится относительно Земли. В этом случае $\vec{V} = 0$; $\vec{w} = 0$; $\vec{f} = m\vec{g}_0 - \vec{P}$. Здесь учтено, что сила реакция опоры и вес тела раны по величине и противоположно направлены. Подставляя эти величины в выражение (10.10), получим:

$$\vec{P} = m\vec{g}_0 + m\omega^2\vec{\rho}_{\perp}. \qquad (10.11)$$

Значит, вес есть геометрическая сумма силы гравитационного притяжения Земли $\vec{F} = m\vec{g}_0$ и центробежной силы инерции.

С другой стороны $\vec{P} = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ – результирующее ускорение свободного падения. Из рисунка видно, что $\vec{g}$ не направлено к центру Земли, хотя легко показать, что угол α мал. Таким образом, неинерциальность Земли легко установить, измеряя $\vec{g}$ на разных широтах. Проектируем (10.11) на направление вертикали, полагая $\cos\alpha \approx 1$, тогда будем иметь:

$$g = g_0 - \omega^2 \rho_\perp \cos\theta = g_0 - \omega^2 R \cos^2\theta, \qquad (10.11а)$$

где R – радиус Земли, θ – широтный угол, отсчитываемый от экватора. Направление вектора ускорения свободного падения $\vec{g}$ определяет направление отвеса, то есть везде, кроме экватора и полюса отвес направлен не к центру Земли.

§45. Отклонение падающих тел от направления отвеса

Пусть тело свободно падает в гравитационном поле Земли, тогда уравнение (10.7) перепишется в виде:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + 2m\left[\vec{V}\vec{\omega}\right]. \qquad (10.12а)$$

Или

$$\vec{w} = \vec{g} + 2\left[\vec{V}\vec{\omega}\right]. \qquad (10.12)$$

Второе слагаемое определяется силой Кориолиса, оно определяет ускорение Кориолиса в (10.12). Ускорение Кориолиса перпендикулярно к $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$. Уравнение (10.12) описывает свободное падение с учетом вращения Земли, $\vec{V}$ – скорость движения тела. Центробежная сила инерции учтена тем, что мы написали $\vec{g}$, а не $\vec{g}_0$.

Чтобы выяснить характер движения тела, необходимо решить обратную задачу кинематики, используя для ускорения выражение (10.12). Возможны несколько путей решения этого дифференциального уравнения, мы воспользуемся так называемым методом последовательных приближений, учитывая малость ускорения Кориолиса. В нулевом приближении им можно пренебречь: $\vec{w}^{(0)} = \vec{g}$, откуда $\vec{V} = \vec{g}t$ – здесь мы учли, что тело падает без начальной скорости, то есть $\vec{V}_0 = 0$. Пользуясь выражением для скорости $\vec{V}$, учтем влияние кориолисовой силы; для этого подставим $\vec{V}$ в (10.12) и получим ускорение в первом приближении:

$$\vec{w}^{(1)} = \vec{g} + 2t[\vec{g}\vec{\omega}]. \qquad (10.13)$$

Интегрируя (10.13) получим скорость в первом приближении:

$$\vec{V}^{(1)} = \vec{g}t + t^2[\vec{g}\vec{\omega}]. \qquad (10.14)$$

Подставляя (10.14) в (10.12) найдем ускорение во втором приближении:

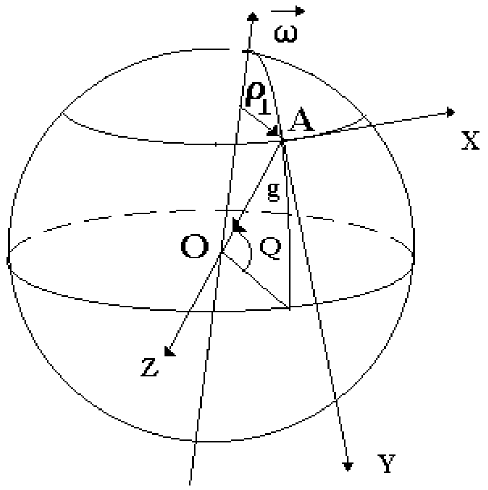
$$\vec{w}^{(2)} = \vec{g} + 2t[\vec{g}\vec{\omega}] + 2t^2[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \qquad (10.15)$$

Интегрируя (10.15) найдем $\vec{V}^{(2)}$:

$$\vec{V}^{(2)} = \vec{g}t + t^2[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \qquad (10.16)$$

Интегрируя (10.16) найдем радиус-вектор, в любой момент времени:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{g}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}t^3[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{1}{6}t^4[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \qquad (10.17)$$



Для смещения тела из начального положения получим:

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}t^3[\vec{g}\vec{\omega}] + \frac{1}{6}t^4[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]. \qquad (10.18)$$

Модули входящих сюда векторных произведений легко определить:

$$|[\vec{g}\vec{\omega}]| = g\omega\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = g\omega\cos\theta; \; |[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]| = g\omega^2\cos\theta.$$

Чтобы понять полученный результат, введем систему координат с началом в точке A, откуда начало падать тело, а оси направим так: ось X – по касательной к параллели на восток, ось Y – по касательной к меридиану на юг, ось Z – по направлению отвеса. Очевидно, что $[\vec{g}\vec{\omega}]$

направлено вдоль X, то есть на восток, а $[[\vec{g}\vec{\omega}]\vec{\omega}]$ направлено вдоль $\rho_{\perp}$. Проектируя (10.18) на выбранные оси, получим:

$$X = S_{в} = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\theta, \tag{10.19}$$

$$Y = S_{э} = \frac{1}{12}\omega^2 g t^4 \sin 2\theta, \tag{10.20}$$

$$Z = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{6}\omega^2 t^4 g \cos^2\theta. \tag{10.21}$$

Из приведенных выражений (10.18–10.21) видно, что свободно падающее тело, за счет действия силы Кориолиса отклоняется на восток и к экватору.

Следует отметить, что отклонение к экватору значительно меньше отклонения на восток. Численные оценки проводятся достаточно легко, их необходимо выполнить самостоятельно.

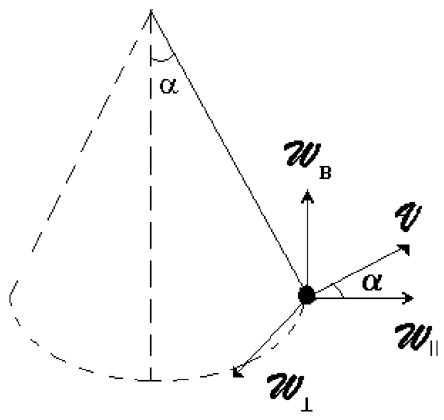
Отклонение к востоку при падении с высоты $h = 100$ метров на широте Донецка ($\theta = 48°$), составляет $S_{в} = 1{,}55$ см.

§46. Маятник Фуко

Для доказательства неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей, используют маятник Фуко – это массивный шар, подвешенный на достаточно длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия. Это один из самых зрелищных и убедительных способов доказательства вращения Земли. Выведем маятник из положения равновесия и предоставим его самому себе. Если бы Земля являлась инерциальной системой отсчета, на маятник действовали бы только «обычные» силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}$, обе силы лежат в вертикальной плоскости и, следовательно, маятник будет совершать колебания в одной и той же плоскости, неподвижной относительно Земли. В действительности это не так. Опыты показали, что плоскость качания маятника медленно вращается в том же направлении, что и Солнце. Это и является доказательством неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей. Впервые такой опыт был проведен Фуко в Парижской обсерватории в 1850 году. Маятник имел длину 67 метров и состоял из металлического шара массы m = 28 кг. Проще всего понять причину вращения плоскости качаний, рассматривая маятник, совершающий колебания на полюсе, однако для сокращения времени рассмотрим сразу маятник, расположенный на географической широте θ. Разложим вектор угловой скорости на две составляющие вертикальную $\vec{\omega}_в$ и горизонтальную $\vec{\omega}_г$. Горизонтальную составляющую в свою очередь разложим на две составляющие: $\vec{\omega}_\parallel$ – лежащую в плоскости качаний и $\vec{\omega}_\perp$ – перпендикулярную к ней составляющую. Тогда вместо (10.7) будем иметь:

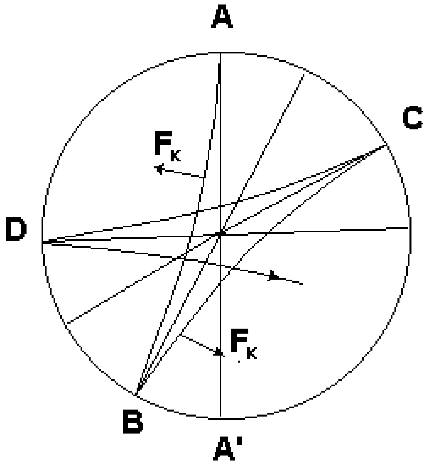
$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F} + 2m\left[\vec{V}\vec{\omega}_B\right] + 2m\left[\vec{V}\vec{\omega}_\perp\right] + 2m\left[\vec{V}\vec{\omega}_\parallel\right].$$

Сила $2m\left[\vec{V}\vec{\omega}_\perp\right]$ направлена вдоль нити маятника, она меняет натяжение нити, но изменить положение плоскости качаний не может. Вторая составляющая горизонтальной силы – $2m\left[\vec{V}\omega_\parallel\right]$ перпендикулярна плоскости качаний, однако, если колебания малы, то мала и эта составляющая в силу малости α; кроме того, она каждую четверть периода меняет направление, поэтому она приводит лишь к малым колебаниям плоскости качаний, но не приводит к ее систематическому вращению. Наиболее важную роль играет слагаемое $2m\left[\vec{V}\vec{\omega}_B\right]$, эта сила перпендикулярна к плоскости качаний и приводит к систематическому ее вращению, плоскость будет вращаться вокруг вертикали, с угловой скоростью $\omega_B = \omega \sin\theta$, где θ широта, на которой происходят колебания маятника. Легко найти время полного оборота маятника:



$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi}{\omega\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta}, \qquad (10.22)$$

где T – период обращения Земли вокруг собственной оси.

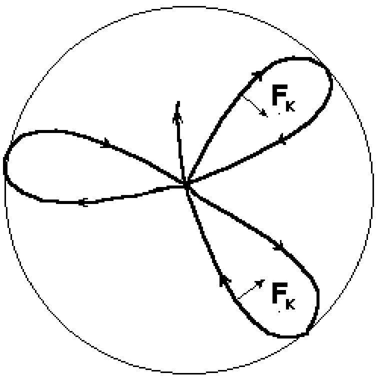


а)

Рассмотрим более подробно форму траектории маятника Фуко при различных способах возбуждения колебаний. Пусть маятник отведен в крайнее положение (точка A) и отпущен без начальной скорости. Пусть $\vec{\omega}_B$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка вверх. Кориолисова сила, действующая на маятник в процессе его движения, направлена вправо по ходу маятника, поэтому маятник придет не в диаметрально противоположную точку A', а отклонится и придет в точку B.

Затем все повторится. Схематически траектория представлена на рисунке *а*), где отклонения сильно увеличены. В оригинальном опыте Фуко в 1951 году, при диаметре круга около 3 м, за один период плоскость колебания смещалась всего на 3 мм, полный оборот совершался примерно за 32 часа (широта Парижа 48°57’), что хорошо согласуется с результатом, получаемым из выражения (10.22).

Если маятник вывести из положения равновесия толчком, то есть, сообщив ему начальную скорость, траектория по-прежнему будет изгибаться в сторону действия силы Кориолиса, то есть вправо, однако маятник все время будет проходить через первоначальное равновесное положение, рисунок *б*). Закругления в крайних положениях объясняются отличной от нуля перпендикулярной составляющей скорости, возникающей в результате действия силы Кориолиса.



б)

Приведем еще несколько примеров, в которых наглядно проявляется действие силы Кориолиса. На тело, движущееся вдоль меридиана в северном полушарии в любом направлении, действует сила направленная вправо по отношению к направлению движения. (В южном полушарии – влево). Это приводит к тому, что у рек в северном полушарии правый берег круче левого, так как он все время подмывается. В южном полушарии наоборот. Эти причины объясняют неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении. Летящие снаряды также испытывают отклонения, обусловленные кориолисовыми силами. При выстреле из орудия на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу в южном полушарии. Действие силы Кориолиса приводит к тому, что снаряд, летящий вдоль экватора на запад, прижимается к Земле и поднимается кверху при стрельбе в восточном направлении.

В заключение рассмотрим вопрос о взаимосвязи гравитационных сил и сил инерции. Известно, что все тела, независимо от их масс и химического состава получают в данном гравитационном поле одинаковые ускорения, в таком поле они движутся совершенно одинаково при одинаковых начальных условиях. То же самое справедливо и для сил инерции. Эта аналогия имеет столь глубокий характер, что была возведена в постулат, получивший название <u>принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции</u>, согласно которому все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.

При этом следует помнить, что речь идет об однородных полях.

Конкретное поле тяготения меняется при переходе от одной точки пространства к другой. Поэтому, вообще говоря, нельзя подобрать такую систему отсчета, которая движется таким образом, что ее ускорение в каждой точке пространства эквивалентно по своему действию, имеющемуся там полю тяготения. Однако при рассмотрении поля тяготения в достаточно малой области пространства, в первом приближении его можно считать однородным в этой области. Поэтому в достаточно малой области пространства всегда можно воспользоваться принципом эквивалентности и сделать вполне определенное заключение о ходе физических процессов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики: учебное пособие для студентов вузов / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1974. – 520 с.

2. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учебное пособие для студентов вузов / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1976. – 416 с.

3. Стрелков С. П. Механика / С. П. Стрелков. – М.: Наука, 1965. – 545 с.

4. Иродов И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М.: Высш. шк., 1978. – 240 с.

5. Киттель Ч. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М.: Наука, 1971. – 480 с.

6. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1977. – Т. 1. – 416 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Навчальне видання

Русаков Володимир Федорович

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

(для студентів денної форми навчання спеціальностей «Фізика», «Прикладна фізика»)

Навчальний посібник

(Російською мовою)

Редактор Т. О. Важеніна

Технічний редактор Т. О. Важеніна

Підписано до друку 11.11.15
Формат 60 х 84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 7,4
Тираж 50 прим. Зам. 58

Донецький національний університет (Вінниця)
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1854 від 24.06.2004