УДК 512.548

Ірина Фриз

провідний спеціаліст відділу аспірантури і докторантури,
Донецький національний університет імені Василя Стуса

ОРТОГОНАЛЬНІ ДОПОВНЕННЯ ТЕРНАРНИХ ОПЕРАЦІЙ

У статті описуються методи побудови ортогональних тернарних операцій, а також вивчаються алгоритми знахоження ортогональних доповнень повних тернарних операцій та пар ортогональних тернарних операцій до трійки ортогональних тернарних операцій. Наведена повна класифікація рекурсивних алгоритмів побудови ортогональних тернарних операцій.

Ключові слова: *оборотна операція (квазігрупа), ортогональні операції, ретрактно ортогональні операції, ортогональні доповнення, повна операція.*

Вступ

Нагадаємо, що довільна вибірка ортогональних оборотних операцій (квазігруп) є еквівалентною максимально дистанційно роздільному коду (МДР-коду) [1]. До того ж, кожна квазігрупа є еквівалентною МДР-коду, але, взагалі кажучи, для довільної вибірки ортогональних операцій це не так. Однак довільні $(n+s)$-вибірки ортогональних n-арних операцій (s є довільним скінченним цілим числом) є еквівалентними деякому МДР-коду [2]. З огляду на це кожна повна операція може бути однією із визначаючих функцій деякого МДР-коду.

Відзначимо, що навіть у тернарному випадку ортогональність бінарних операцій має декілька узагальнень. Наприклад, у бінарному випадку ортогональність квазігруп та сильна ортогональність квазігруп – те ж саме, але навіть у тернарному випадку сильна ортогональність є вужчим поняттям, ніж ортогональність квазігруп.

Для бінарних квазігруп знаходження ортогональних доповнень (ортогональних пар) описано в [3]. Г.Б. Білявська та Г.Л. Муллен довели, що кожна k-вибірка ортогональних n-арних операцій ($k<n$) є вбудовною в деяку n-вибірку ортогональних n-арних операцій [4], але вони не вказали шляху знаходження ортогональних доповнень. Проте блочний рекурсивний алгоритм побудови ортогональних операцій, який запропонований автором та Ф.М.Сохацьким у [5] і є узагальненням алгоритму із [4], дає можливість знайти доповнення для серії повних і ортогональних операцій.

Метою даної статті є описання знаходження ортогональних доповнень для тернарних операцій, оскільки три є першою арністю, в якій з'являються проблеми невластиві для бінарного випадку.

1. Основні означення та результати

Бінарна операція f, яка визначена на множині Q, називається

- *лівооборотною (ℓ-оборотною)*, якщо для довільних b, $c \in Q$ існує єдиний елемент x такий, що $f(x,b)=c$;
- *правооборотною (r-оборотною)*, якщо для довільних a, $c \in Q$ існує єдиний елемент y такий, що $f(a,y)=c$;

- *оборотною* або *квазігруповою*, якщо вона є ℓ-і r-оборотною.

Бінарні операції h_1 і h_2 на Q називаються *ортогональними*, якщо система рівнянь

$$\begin{cases} h_1(x,y) = a, \\ h_2(x,y) = b \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для будь-яких $a, b \in Q$.

Тернарна операція f, яка визначена на множині Q, називається

- *лівооборотною (ℓ-оборотною)*, якщо для довільних b, c, $d \in Q$ існує єдиний елемент x такий, що $f(x,b,c) = d$;
- *середньооборотною (m-оборотною)*, якщо для довільних a, c, $d \in Q$ існує єдиний елемент y такий, що $f(a,y,c) = d$;
- *правооборотною (r-оборотною)*, якщо для довільних a, b, $d \in Q$ існує єдиний елемент z такий, що $f(a,b,z) = d$;
- *оборотною* або *квазігруповою*, якщо вона є ℓ-, m- і r-оборотною.

Операції ${}^{\ell}f$, ${}^{m}f$ і ${}^{r}f$, які визначені на множині Q, називаються *лівим, середнім і правим діленнями* квазігрупи f відповідно, якщо вони визначаються співвідношеннями:

$$\begin{array}{c} f(x,y,z) = u \Longleftrightarrow {}^{\ell}f(u,y,z) = x, \\ f(x,y,z) = u \Longleftrightarrow {}^{m}f(x,u,z) = y, \\ f(x,y,z) = u \Longleftrightarrow {}^{r}f(x,y,u) = z. \end{array}$$

Існує декілька означень ортогональності, які наведені у [1], [2], [4] тощо. Тут ми будемо дотримуватися означення із [4].

Означення 1. *Трійка тернарних операцій f_1, f_2, f_3 на Q порядку m називається* ортогональною*, якщо система*

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = b_1, \\ f_2(x,y,z) = b_2, \\ f_3(x,y,z) = b_3 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для довільних $b_1, b_2, b_3 \in Q$.

Пара тернарних операцій f_1, f_2 на Q порядку m називається ортогональною*, якщо система*

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = b_1, \\ f_2(x,y,z) = b_2 \end{cases}$$

має точно m розв'язків для довільних $b_1, b_2 \in Q$.

Тернарна операція f на Q порядку m називається повною*, якщо рівняння $f(x,y,z) = b$ має m^2 розв'язків для довільного $b \in Q$.*

Визначимо бінарні операції за допомогою тернарної операції f, яка визначена на Q:

$$\begin{array}{l} f_{(c,\{1,2\})}(x,y) := f(x,y,c), \\ f_{(b,\{1,3\})}(x,z) := f(x,b,z), \\ f_{(a,\{2,3\})}(y,z) := f(a,y,z), \end{array}$$

де $a, b, c \in Q$. Операції $f_{(c,\{1,2\})}$, $f_{(b,\{1,3\})}$, $f_{(a,\{2,3\})}$ називаються $\{1,2\}$-, $\{1,3\}$-, $\{2,3\}$-ретрактами операції f за допомогою елементів a, b, c відповідно. Відзначимо, що $\{i,j\}$-ретракт та $\{j,i\}$-ретракт однієї операції – це те ж саме.

Нехай $\delta := \{i_1, i_2\} \subset \{1,2,3\}$; f, g є тернарними операціями на Q і $a, b \in Q$. Бінарні операції $f_{(a,\delta)}$ і $g_{(b,\delta)}$ називаються *подібними δ-ретрактами* операцій f і g, якщо $a = b$.

Означення 2. *Якщо всі подібні δ-ретракти операцій f і g є ортогональними, то f і g називаються δ-ретрактно ортогональними.*

Нагадаємо, що бінарні операції h_1 і h_2 на Q називаються *ортогональними*, якщо ситема рівнянь $\{h_1(x,y) = a,\ h_2(x,y) = b\}$ має єдиний розв'язок для будь-яких $a, b \in Q$.

Зауважимо, що якщо $\delta = \{i\}$, то δ-ретрактна ортогональність операції є її i-оборотністю. Поняття ретрактної ортогональності для n-арних операцій вперше введено у [5], а взаємозв'язок між ортогональністю та ретрактною ортогональністю описаний у [6]. В нижче наведених твердженням подано уточнення теореми 1 із [6] для тернарних операцій.

Наслідок 1. *Якщо для деякої множини $\{i_1, i_2\} \subset \overline{1,3}$ пара тернарних операцій є $\{i_1, i_2\}$-ретрактно ортогональною, то ці операції є ортогональними.*

Наслідок 2. *Існують пари ортогональних тернарних операцій такі, що для деякої множини $\{i_1, i_2\} \subset \overline{1,3}$ вони не є $\{i_1, i_2\}$-ретрактно ортогональними.*

2. Побудова ортогональних тернарних операцій

У цьому розділі розглянемо детальніше блочний рекурсивний алгоритм для бінарного і тернарного випадків, які є уточненням алгоритмів із [4] і [5].

Тривіальним розбиттям називатимемо розбиття таке, що кожна його підмножина є одноелементною. Кожен блочний рекурсивний алгоритм визначається розбиттям множини індексів змінних. Тривіальним рекурсивним алгоритмом називається блочний рекурсивний алгоритм, якщо він визначається тривіальним розбиттям. Для бінарних операцій існують лише тривіальні розбиття, а для тернарних – як тривіальні так і нетривіальні.

Для бінарних операцій маємо два блочних рекурсивних алгоритми:

1. Лівий рекурсивний алгоритм:

$$\begin{cases} g_1(x,y) = f_1(x,y), \\ g_2(x,y) = f_2(f_1(x,y), y). \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Якщо f_1 є ℓ-оборотною і f_2 є r-оборотною бінарними операціями на Q, то операції g_1 і g_2, які є побудовними за (1), є ортогональними.*

2. Правий рекурсивний алгоритм:

$$\begin{cases} g_1(x,y) = f_1(x,y), \\ g_2(x,y) = f_2(x, f_1(x,y)). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. *Якщо f_1 є r-оборотною і f_2 є ℓ-оборотною бінарними операціями на Q, то операції g_1 і g_2, які є побудовними за (2), є ортогональними.*

Теореми 1 і 2 є наслідками теореми 3 із [4].

Впорядковані розбиття індексів змінних, які відповідають лівому та правому рекурсивним алгоритмам, є $(\{1\},\{2\})$ і $(\{2\},\{1\})$ відповідно. Перший блок розбиття визначає оборотність першої вхідної операції і місце у яке має бути підставлена ця операція у другу вхідну операцію, другий блок визначає оборотність другої вхідної операції.

Розглянемо блочні рекурсивні алгоритми побудови ортогональних тернарних операцій. Кожному блочному рекурсивному алгоритму також відповідає визначаюче розбиття множини індексів змінних, тобто множини $\{1,2,3\}$.

Алгоритм 1. Тривіальний рекурсивний алгоритм (визначаюче розбиття $(\{1\},\{2\},\{3\})$):

$$\begin{aligned} &g_1(x,y,z):=f_1(x,y,z),\\ &g_2(x,y,z):=f_2(f_1(x,y,z),y,z),\\ &g_3(x,y,z):=f_3(f_1(x,y,z),f_2(f_1(x,y,z),y,z),z). \end{aligned} \tag{3}$$

або

$$\begin{aligned} &g_1(x,y,z):=f_1(x,y,z),\\ &g_2(x,y,z):=f_2(f_1(x,y,z),y,z),\\ &g_3(x,y,z):=f_3(f_2(f_1(x,y,z),y,z),f_1(x,y,z),z). \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 3. *Нехай f_1 є ℓ-оборотною, f_2 є m-оборотною і f_3 є r-оборотною операціями на множині Q. Тоді операції g_1, g_2 і g_3, які побудовні за (3) і (4), є ортогональними.*

Для тернарних операцій існує 6 тривіальних рекурсивних алгоритмів (як кількість різних перестановок множини $\{1,2,3\}$) із такими вхідними даними:

1. f_1 – ℓ-оборотна, f_2 – m-оборотна і f_3 – r-оборотна операції;
2. f_1 – ℓ-оборотна, f_2 – r-оборотна і f_3 – m-оборотна операції;
3. f_1 – m-оборотна, f_2 – ℓ-оборотна і f_3 – r-оборотна операції;
4. f_1 – m-оборотна, f_2 – r-оборотна і f_3 – ℓ-оборотна операції;
5. f_1 – r-оборотна, f_2 – m-оборотна і f_3 – ℓ-оборотна операції;
6. f_1 – r-оборотна, f_2 – ℓ-оборотна і f_3 – m-оборотна операції.

Для кожного із цих випадків можна переформулювати теорему 3.. Наприклад, у випадку 3 операція f_1 є m-оборотною, тобто 2-оборотною, тому g_2 будуємо поклавши f_1 на друге місце у операцію f_2 (f_2 є ℓ-оборотною, тобто 1-оборотною), а операцію g_3 будуємо поклавши f_1 і g_2 на перше та друге місце операції f_3. Таким чином, відповідним впорядкованим розбиттям є $(\{3\},\{2\},\{1\})$.

Алгоритм 2. Блочний рекурсивний алгоритм з визначаючим розбиттям $(\{1\},\{2,3\})$:

$$\begin{aligned} &g_1(x,y,z):=f_1(x,y,z),\\ &g_2(x,y,z):=f_2(f_1(x,y,z),y,z),\\ &g_3(x,y,z):=f_3(f_1(x,y,z),y,z). \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 4. *Нехай* f_1 *є* ℓ*-оборотною тернарною операцією і* f_2, f_3 *є* $\{2,3\}$*-ретрактно ортогональними операціями на* Q. *Тоді операції* g_1, g_2 *і* g_3, *які є побудовними за (5), є ортогональними.*

Існує 3 алгоритми цього виду (як кількість різних видів бінарних ретрактів тернарних операцій) з такими вхідними даними:

1. f_1 – ℓ-оборотна операція і f_2, f_3 – $\{2,3\}$-ретрактно ортогональні;
2. f_1 – m-оборотна операція і f_2, f_3 – $\{1,3\}$-ретрактно ортогональні;
3. f_1 – r-оборотна операція і f_2, f_3 – $\{1,2\}$-ретрактно ортогональні.

Для кожного із цих випадків можна переформулювати теорему 4.. Наприклад, у випадку 3 операція f_1 є r-оборотною (3-оборотною), тому операції g_2 і g_3 будуються шляхом заміни змінної z у термах $f_2(x,y,z)$ і $f_3(x,y,z)$ на $f_1(x,y,z)$. Отже, відповідним впорядкованим розбиттям є $\big(\{3\},\{1,2\}\big)$.

Алгоритм 3. Блочний рекурсивний алгоритм з визначаючим розбиттям $\big(\{1,2\},\{3\}\big)$:

$$\begin{aligned} &g_1(x,y,z):=f_1(x,y,z),\\ &g_2(x,y,z):=f_2(x,y,z),\\ &g_3(x,y,z):=f_3(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),z) \end{aligned} \tag{6}$$

або

$$\begin{aligned} &g_1(x,y,z):=f_1(x,y,z),\\ &g_2(x,y,z):=f_2(x,y,z),\\ &g_3(x,y,z):=f_3(f_2(x,y,z),f_1(x,y,z),z). \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 5. *Нехай* f_1 *і* f_2 *є* $\{1,2\}$*-ретрактно ортогональними операціями і* f_3 *є* r*-оборотною тернарною операцією, які визначені на множині* Q. *Тоді операції* g_1, g_2 *і* g_3, *які є побудовними за (6) і (7), є ортогональними.*

Існує 3 алгоритми цього виду з такими вхідними даними:

1. f_1, f_2 – $\{1,2\}$-ретрактно ортогональні і f_3 – r-оборотна;
2. f_1, f_2 – $\{1,3\}$-ретрактно ортогональні і f_3 – m-оборотна;
3. f_1, f_2 – $\{2,3\}$-ретрактно ортогональні і f_3 – ℓ-оборотна.

Для кожного із цих випадків можна переформулювати теорему 5..

Зауважимо, що теореми 3., 4. і 5. є наслідками теореми 5 із [5].

3. Ортогональні доповнення тернарних операцій

Нагадаємо, що кожна k-вибірка ортогональних n-арних операцій ($k < n$) є вбудовною у n-вибірку ортогональних n-арних операцій [4]. Отже, кожна повна n-арна операція є також вбудовною у n-вибірку ортогональних n-арних операцій. Вибірка n-арних операцій $f_{k+1},\ldots,\ f_n$ називається *ортогональним доповненням* вибірки ортогональних n-арних операцій $f_1,\ldots,\ f_k$, якщо вибірка операцій $f_1,\ldots,\ f_n$ є ортогональною.

Алгоритм 1 дає можливість доповнити ℓ-оборотну тернарну операцію до трійки ортогональних тернарних операцій використовуючи лише оборотні на одному місці операції, тобто до ℓ-оборотної операції додаємо дві операції, які будуються рекурсивно за допомогою m-оборотної та r-оборотної операцій.

Теорема 6. *Нехай f_1 є ℓ-оборотною тернарною операцією на множині Q. Операції g_2 і g_3, які визначені рівностями* (3) *і* (4) *через довільні m-оборотну операцію f_2 і r-оборотну операцію f_3, є ортогональним доповненням операції f_1 до трійки ортогональних тернарних операцій f_1, g_2, g_3.*

Доведення цієї теореми випливає із теореми 3..

Алгоритм 2 дає можливість доповнювати ℓ-оборотну тернарну операцію до трійки ортогональних тернарних операцій. Для цього потрібно додати дві операції, які є побудовними за допомогою пари $\{2,3\}$-ретрактно ортогональних тернарних операцій.

Теорема 7. *Нехай f_1 є ℓ-оборотною тернарною операцією на множині Q. Операції g_2 і g_3, які визначені рівностями* (5) *через довільні тернарні $\{2,3\}$-ретрактно ортогональні операції, є доповненням операції f_1 до трійки ортогональних тернарних операцій f_1, g_2, g_3.*

Доведення цієї теореми випливає із теореми 4..

Очевидно, що за допомогою алгоритму 2 отримуємо ту ж саму трійку ортогональних операцій тоді і тільки тоді, коли взяти ту ж саму пару $\{2,3\}$-ретрактно ортогональних операцій.

Зауваження 1. *Довільна ℓ-оборотна тернарна операція є доповнювальною до трійки ортогональних операцій за алгоритмом 1 і алгоритмом 2.*

Нехай f_1 є ℓ-оборотною тернарною операцією. Припустимо (g_2, g_3) є доповненням операції f_1 до трійки ортогональних операцій за алгоритмом 1 з допомогою операцій f_2, f_3 і (g_2', g_3') є доповненням операції f_1 до трійки ортогональних операцій за алгоритмом 2 з допомогою операцій f_2', f_3'. У першому випадку маємо два варіанти: 1) f_2 є m-оборотною і f_3 є r-оборотною; 2) f_2 є r-оборотною і f_3 є m-оборотною. У другому випадку f_2', f_3' є $\{2,3\}$-ретрактно ортогональними.

Розглянемо випадок 1). Якщо $g_2 = g_2'$, тоді

$$f_2(f_1(x,y,z),y,z) = f_2'(f_1(x,y,z),y,z),$$

отже, $f_2 = f_2'$.

Якщо $g_3 = g_3'$, тоді

$$f_3(f_1(x,y,z), f_2'(f_1(x,y,z),y,z),z) = f_3'(f_1(x,y,z),y,z).$$

Покладемо у останню рiвнiсть довiльний елемент $a \in Q$ замiсть терму $f_1(x,y,z)$:

$$f_3(a, f_2'(a,y,z), z) = f_3'(a,y,z).$$

Визначимо бiнарнi операцiї h_2, h_3 i m_3:

$$h_2(y,z) := f_2'(a,y,z), \quad h_3(y,z) := f_3'(a,y,z), \quad m_3(v,z) := f_3(a,v,z).$$

Ретрактна ортогональнiсть операцiй f_2' i f_3' спричинює ортогональнiсть бiнарних операцiй h_2 i h_3 i r-оборотнiсть операцiї f_3 забезпечує r-оборотнiсть операцiї m_3. Вiдповiдно до цих позначень маємо рiвнiсть

$$h_3(y,z) = m_3(h_2(y,z), z).$$

Це означає, що операцiї h_2 i h_3 є побудовними за (1). Отже, ортогональнi доповнення за алгоритмами 1 i 2 збiгаються тодi i тiльки тодi, коли кожна пара $\{2,3\}$-ретрактiв $\{2,3\}$-ретрактно ортогональних операцiй є побудовною за лiвим рекурсивним алгоритмом.

Аналогiчно розглядаючи випадок 2), отримуємо, що доповнення за алгоритмами 1 i 2 збiгаються тодi i тiльки тодi, коли кожна пара $\{2,3\}$-ретрактiв $\{2,3\}$-ретрактно ортогональних операцiй є побудовною за правим рекурсивним алгоритмом.

Таким чином, множина доповнень ℓ-оборотної тернарної операцiї до трiйки ортогональних операцiй, якi побудовнi за тривiальним рекурсивним алгоритмом, i множина доповнень, якi побудовнi за алгоритмом 2, мають непорожнiй перетин, але вони не збiгаються. Це випливає iз роботи [5]: iснують ортогональнi операцiї такi, що жодна її операцiя не є навiть одностороньооборотною, в той час як принаймнi одна з ортогональних операцiї побудовних за тривiальним рекурсивним алгоритмом мусить бути оборотною хоча б на одному мiсцi. До того ж очевидно, що трiйка тернарних лiнiйних операцiй над абелевою групою є ортогональною тодi i тiльки тодi коли вiдповiдна матриця є оборотною, однак iснують оборотнi матрицi, елементи яких не є автоморфiзмами.

Використовуючи алгоритм 3, ми можемо доповнити пару $\{1,2\}$-ретрактно ортогональних тернарних операцiй до трiйки ортогональних операцiй. Для цього необхiдно додати одну операцiю, яка побудовна рекурсивно за допомогою довiльної r-оборотної операцiї.

Теорема 8. *Нехай f_1, f_2 є $\{1,2\}$-ретрактно ортогональними тернарними операцiями на Q. Операцiя g_3, яка визначається останньою рiвнiстю iз (6) i (7) за допомогою довiльної правооборотної операцiї, є доповненням операцiй f_1, f_2 до трiйки ортогональних операцiй f_1, f_2, g_3.*

Справдi за наслiдком 1. $\{1,2\}$-ретрактно ортогональнi операцiї є ортогональними, тому їх можна доповнити до трiйки ортогональних операцiй, а вiдповiдно до теореми 5. операцiя g_3 є ортогональним доповненням ортогональних операцiй f_1, f_2.

Зауважимо, що два доповнення g_3 i g_3' $\{1,2\}$-ретрактно ортогональних операцiй f_1, f_2 до трiйки ортогональних тернарних операцiй за допомогою r-оборотних операцiй f_3 i f_3' вiдповiдно збiгаються тодi i тiльки тодi, коли $f_3 = f_3'$.

Теореми 6., 7. i 8. можна переформулювати для iнших блочних рекурсивних алгоритмiв, якi описанi у роздiлi 2.

Висновки

Ця стаття є продовженням досліджень, які присвячені знаходженню ортогональних доповнень. Проблема доповнення ортогональних операцій є найбільш дослідженою у бінарному випадку, оскільки проблема побудови ортогональних операцій і проблема знаходження ортогональних доповнень для арності 2 збігаються. Тут описано алгоритми побудови ортогональних доповнень для тернарних операцій. Подальшими дослідженнями в даному напрямку є описання побудови ортогональних доповнень для довільної арності та дослідження взаємозв'язків між різними алгоритмами, а також знаходження кількості ортогональних доповнень ортогональних операцій.

Література

[1] González S. Recursive MDS-codes and recursively differentiable quasigroups / S. González, E. Couselo, V.T. Markov, A.A. Nechaev // Diskr. Mat. — 1998. — №10:2. — P. 3–29; Discrete Math. Appl. — 1998. — №8:3. — C. 217–245.

[2] Soedarmadji E. Latin hypercubes and MDS-codes // Discrete Math. — 2006. — №306. — C. 1232–1239.

[3] Keedwell A.D., Denes J., Latin Squares and their Applications, second edition. — Amsterdam: North Holland, 2015. — 419p.

[4] Belyavskaya G. Orthogonal hypercubes and n-ary operations / G. Belyavskaya, G.L. Mullen // Quasigroups Related Systems. — 2005. — №13, 1. — P.73–86.

[5] Fryz I.V. Block composition algorithm for constructing orthogonal n-ary operations / I.V. Fryz, Sokhatsky F.M. // Discrete Math. — 2017. — №340. — P. 1957–1966.

[6] Fryz I.V. Relations between orthogonality and retract orthogonality // Abstracts of talks of XI International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V.V.Kirichenko, July 3-7, 2017, Kyiv, Ukraine. — 2017. — P.44.

Iryna Fryz

leading specialist of PhD and Doctoral Studies Department,
Vasyl' Stus Donetsk National University

ORTHOGONAL COMPLEMENTS OF TERNARY OPERATIONS

SUMMARY

In the article, we describe methods for construction of orthogonal ternary operations, and we study algorithms of finding orthogonal complements of a complete ternary operation and a pair of orthogonal ternary operations to a triplet of orthogonal ternary operations. We give a complete classification of recursive algorithms for construction of orthogonal ternary operations.

Key words: *invertible operation (quasigroup), orthogonal operations, retractly orthogonal operations, orthogonal complement, complete operation.*

Ирина Фриз

ведущий специалист отдела аспирантуры и докторантуры,
Донецкий национальный университет имени Василя Стуса

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ ТЕРНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В статье описываются методы построения ортогональных тернарных операций, а также изучаются алгоритмы построения ортогональных дополнений полных тернарных операций и пар ортогональных тернарных операций к тройке ортогональных тернарных операций. Приведена полная классификация рекурсивных алгоритмов построения ортогональных тернарных операций.

Ключевые слова: *обратимая операция (квазигруппа), ортогональные операции, ретрактно ортогональные операции, ортогональное дополнение, полная операция.*